
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2005/2006

November 2005

MSG 327 – Pemodelan Matematik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua **TIGA** soalan.

...2/-

- 1.(a) Persamaan aliran-sebaran untuk pencemaran sungai adalah diberikan oleh

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -u \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc + W. \quad (1)$$

Jika unit asas ialah kg, m, dan s, berikan unit dan maksud bagi setiap sebutan c , u , E , k dan W .

- (b) Apabila keadaan mantap tercapai, persamaan aliran-sebaran bagi pencemaran sungai di atas diringkaskan menjadi

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - kc = 0. \quad (2)$$

Anggapkan pekali E , u dan k adalah malar.

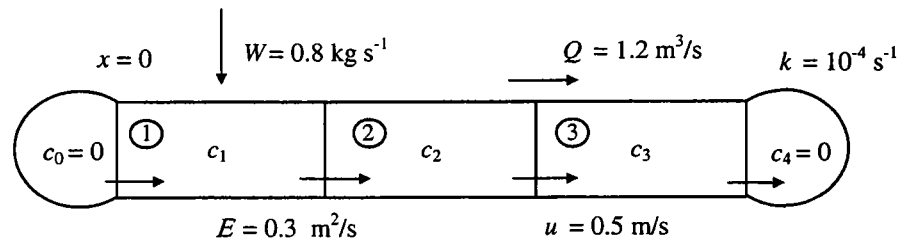
- (i) Terbitkan penyelesaian analitik

$$c(x) = \begin{cases} c_0 e^{m_1 x}, & x \leq 0 \\ c_0 e^{m_2 x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{di mana } m_1 = \frac{u}{2E}(1+\alpha), \quad m_2 = \frac{u}{2E}(1-\alpha), \quad \alpha = \sqrt{1 + \frac{4kE}{u^2}}.$$

Terangkan apakah syarat-syarat sempadan yang sesuai, untuk penyelesaian di atas.

- (ii) Jika aliran ialah $Q \text{ m}^3/\text{s}$ dan kadar perlepasan bahan kimia ialah $W \text{ kg s}^{-1}$ pada $x = 0$, terbitkan nilai $c_0 = \frac{W}{Q\alpha}$.
- (iii) Andaikan $E = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.5 \text{ m/s}$, $Q = 1.2 \text{ m}^3/\text{s}$, $k = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ dan $W = 0.8 \text{ kg s}^{-1}$. Cari c_0 dan $c(x)$. Lakarkan $c(x)$, untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (iv) Dapatkan anggaran nilai untuk setiap sebutan dalam persamaan pembezaan (2) di atas untuk $x \geq 0$ dan $x \leq 0$ masing-masing.
- (c) Berasaskan butir-butir di atas, kita selesaikan (2) bahagian 1(b) melalui kaedah berangka dengan 3 segmen seperti tertunjuk berikut, untuk $x \geq 0$.



Anggapkan panjang setiap segmen ialah $\Delta x = 3000 \text{ m}$, dan $c_0 = 0$, $c_4 = 0$.

Bentukkan sistem (3×3) untuk masalah ini dan selesaikan. Bandingkan dengan jawapan di bahagian (1b) di atas.

Adakah pilihan $\Delta x = 3000 \text{ m}$, dan $c_0 = c_4 = 0$ sesuai?

- (d) Ubahsuaikan (c) dengan menambahkan satu segmen di depan dan satu di belakang sungai dengan $\Delta x = 3000 \text{ m}$. Dengan ini sisa dilepaskan pada segmen kedua. Selesaikan masalah ini dengan 5 segmen.
- (e) Terbitkan persamaan (1). Terangkan dengan jelas anggapan sesuai yang dikenakan.

[100 markah]

- 2.(a) Misalkan suatu bahan organik terlarut (BOD) di dalam satu kolam kecil dengan kepekatan $\ell \text{ mg/l}$, (O_2) yang merosot nilainya mengikut kadar linear berikut

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = -\alpha \ell, \quad \ell(0) = \ell_0. \quad (3)$$

Di samping ini oksigen terlarut (DO) dalam kolam itu $c \text{ mg/l } O_2$ akan berubah mengikut

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \beta(c_s - c) - \alpha \ell, \quad c(0) = c_0 \quad (4)$$

di mana β ialah kadar pengudaraan semula dan c_s pemalar ketepuan bagi oksigen terlarut c .

Selesaikan (3) untuk ℓ terlebih dahulu dan kemudian selesaikan (4) untuk c .

Jika $\ell_0 = 15 \text{ mg/l}$, $c_0 = 7 \text{ mg/l}$, $c_s = 8 \text{ mg/l}$, $\alpha = 0.6 \text{ sehari}$ dan $\beta = 1.0 \text{ sehari}$, dapatkan ℓ dan c . Lakarkan ℓ dan c di rajah yang sama, untuk $x \in [0, \infty)$.

...4/-

- (b) Sekarang persamaan (3) di atas diubahsuai kepada

$$\frac{\partial \ell}{\partial t} = -\alpha \ell + \gamma \sin (b t) \quad , \quad \ell(0) = \ell_0 \quad (5)$$

di mana γ dan b adalah pemalar. Persamaan (4) dikekalkan. Apakah maksud dan dimensi bagi b dan γ ?

Selesaikan (5) untuk mendapatkan ℓ . Masukkan ℓ ini ke dalam (4) dan selesaikan (4) untuk c .

Jika $\gamma = 0.4 \text{ mg} / \ell / \text{hari}$, dan $b = 0.0172142 / \text{hari}$, dan parameter-parameter lain di dalam (4) dan (5) dikekalkan seperti di atas, selesaikan dan lakarkan ℓ dan c pada rajah yang sama, dengan menunjukkan kelakuan penyelesaian apabila $t \rightarrow \infty$.

[100 markah]

- 3.(a) Andaikan unit asas ialah kg, m dan s. Terbitkan persamaan keabadian

$$\frac{\partial A}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (6)$$

bagi suatu saluran dengan luas keratan rentas $A \text{ m}^2$, aliran air $Q \text{ m}^3 / \text{s}$, $t = \text{masa (s)}$, $x = \text{jarak (m)}$. Seterusnya terbitkan persamaan gelombang tulen

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

bagi suatu saluran seragam dengan $u = \text{halaju air}$ dan $\eta = \text{paras air atas paras purata}$. Terangkan dengan jelas anggapan-anggapan yang sesuai untuk model di atas serta maksud dan unit g dan h .

- (b) Tunjukkan bahawa (7) dan (8) boleh diturunkan kepada bentuk persamaan gelombang berikut:

$$\omega_{\eta} = c^2 \omega_{xx} \quad (9)$$

untuk u dan η masing-masing. Apakah unit dan nilai c^2 ?

Sahkan bahawa

$$\eta = a \sin (\sigma t - kx) \quad (10)$$

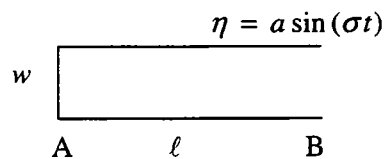
$$u = a \sqrt{\frac{g}{h}} \sin (\sigma t - kx) \quad (11)$$

...5/-

ialah suatu penyelesaian dengan $\sigma^2 = ghk^2$. Apakah maksud dan unit bagi σ dan k ?

- (c) Suatu saluran seragam adalah terbuka kepada pasang surut berkalaan 24.00 jam pada kedua-dua hujung. Biarkan dalaman purata 10m, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Dapatkan dan lakarkan η dan u pada rajah yang sama jika amplitud pasang surut ialah 1.25 m. Apakah frekuensi dan panjang gelombang pasang surut ini?
- (d) Gunakan prinsip keabadian untuk soalan ini.

Misalkan suatu saluran seragam berbentuk segi empat dengan hujung A ditutup dan hujung B terbuka ke pasang-surut $\eta = a \sin(\sigma t)$ m. Biarkan ℓ m = panjang saluran, w m = lebar, d m = dalaman purata, di mana $a \ll d$.



Dapatkan aliran $Q(t) \text{ m}^3/\text{s}$ dan halaju $u(t) \text{ m/s}$ pada hujung B. Biarkan $\ell = 25000 \text{ m}$, $w = 1000 \text{ m}$, $d = 18 \text{ m}$, $a = 2.00 \text{ m}$ dan $\sigma = 2\pi/T$ di mana $T = 12 \text{ jam}$. Cari $Q(t)$ dan $u(t)$.

[100 markah]

- ooo O ooo -