UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2005/2006

April/May 2006

MGM 562 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua tiga** [3] soalan].*

...**/2-**

1. (a) A σ-field $\mathbb{F}$ is said to be countably generated if there is countable collection $C \subset \mathbb{F}$ so that $\sigma(C) = \mathbb{F}$. Show that $\mathfrak{R}^d$ is countably generated.

[25 marks]

(b) (i) Suppose X has density function f. Compute the distribution function X^2 and then differentiate to find its density function.

(ii) When X follows a standard normal distribution show that the density function X^2 is a Chi-Square distribution.

[50 marks]

(c) Suppose X and Y are random variables on $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ and let $A \in \mathbb{F}$. Show that if we let $Z(\omega) = X(\omega)$ for $\omega \in A$ and $Z(\omega) = Y(\omega)$ for $\omega \in A^c$, then Z is a random variable.

[25 marks]

1. *(a) Suatu Medan-σ $\mathbb{F}$ dikatakan terjana terbilang jika terdapat suatu koleksi terbilangkan $C \subset \mathbb{F}$ supaya $\sigma(C) = \mathbb{F}$. Tunjukan bahawa $\mathfrak{R}^d$ adalah terjana terbilangkan.*

[25 markah]

(b) (i) Andaikan X mempunyai fungsi ketumpatan f. Kira fungsi taburan X^2 dan bezakan untuk mencari fungsi ketumpatannya.

(ii) Apabila X mengikuti taburan normal piawai, tunjukkan bahawa fungsi ketumpatan X^2 ialah taburan Khi kuasadua.

[50 markah]

(c) Andaikan X dan Y ialah pembolehubah rawak pada $(\Omega, \mathbb{F}, P)$ dan biarkan $A \in \mathbb{F}$. Tunjukkan bahawa jika kita biarkan $Z(\omega) = X(\omega)$ untuk $\omega \in A$ dan $Z(\omega) = Y(\omega)$ untuk $\omega \in A^c$, maka Z adalah pembolehubah rawak.

[25 markah]

2. (a) Show that a continuous function from $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is a measurable map from $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{R}^d)$ to $(\mathbb{R}, \mathfrak{R})$

[25 marks]

(b) If $E|X|^k < \infty$ then for $0 < j < k$, $E|X|^j < \infty$, show that

$$E|X|^j \le (E|X|^k)^{\frac{j}{k}}$$

[25 marks]

.../3-

(c) Prove that if X and Y are independent and f and g are measurable functions, then $f(X)$ and $g(Y)$ are independent.

[25 marks]

(d) X is said to have a Binomial(n,p) distribution if

$$P(X=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

Show that if $X\sim$ Binomial(n,p) and $Y\sim$ Binomial(m,p) are independent then $X+Y\sim$ Binomial($n+m,p$)

[25 marks]

2. *(a)* *Tunjukkan bahawa suatu fungsi selanjar daripada* $\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *ialah suatu pemetaan tersukat daripada* $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{R}^d)$ *kepada* $(\mathbb{R},\mathfrak{R})$

[25 markah]

(b) *Jika* $E|X|^k<\infty$ *maka untuk* $0<j<k$, $E|X|^j<\infty$, *tunjukkan bahawa*

$$E|X|^j\le(E|X|^k)^{\frac{j}{k}}$$

[25 markah]

(c) *Buktikan bahawa jika X dan Y adalah tak bersandar dan f dan g adalah fungsi-fungsi tersukat, maka f(X) dan g(Y) adalah tak bersandar.*

[25 markah]

(d) *X dikatakan mempunyai taburan Binomial(n.p) jika*

$$P(X=m)=\binom{n}{m}p^m(1-p)^{n-m}$$

Tunjukkan bahawa jika X~Binomial(n,p) dan Y~Binomial(m,p) adalah tak bersandar maka X + Y ~ Binomial(n+m,p)

[25 markah]

3. (a) Let $X_1,X_2,\ldots$ be uncorrelated random variables with $EX_i=\mu_i$ and $\frac{\operatorname{var}(X_i)}{i}\to 0$ as $i\to\infty$.

Let $S_n=X_1+\ldots+X_n$ and $\upsilon_n=\frac{ES_n}{n}$, then prove that as $n\to\infty$, $\frac{S_n}{n}-\upsilon_n\to 0$ in L^2.

[25 marks]

.../4-

(b) (i) Show that if $X \geq 0$ is integer valued, then $EX = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$

(ii) Find a similar definition for EX^2.

[50 marks]

(c) Let $X_1, X_2, \ldots$ be independent with $EX_n = 0$, $\text{var}(X_n) = \sigma_n^2$.

Show that if $\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ then $\sum_n \frac{X_n}{n}$ converges a.s. and hence

$n^{-1} \sum_{m=1}^{n} X_m \to 0$ a.s.

[25 marks]

3. *(a)* *Biarkan* $X_1, X_2, \ldots$ *sebagai pembolehubah tak berkorelasi dengan* $EX_i = \mu_i$ *dan* $\frac{\text{var}(X_i)}{i} \to 0$ *apabila* $i \to \infty$.

Biarkan $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ *dan* $\upsilon_n = \frac{ES_n}{n}$, *maka buktikan bahawa apabila* $n \to \infty$, $\frac{S_n}{n} - \upsilon_n \to 0$ *dalam* L^2.

[25 markah]

(b) *(i)* *Tunjukkan bahawa jika* $X \geq 0$ *ialah suatu nilai integer, maka* $EX = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$

(ii) *Cari takrifan yang sama untuk* EX^2.

[50 markah]

(c) *Biarkan* $X_1, X_2, \ldots$ *sebagai tak bersandar dengan* $EX_n = 0$, $\text{var}(X_n) = \sigma_n^2$.

Tunjukkan bahawa jika $\sum_n \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ *maka* $\sum_n \frac{X_n}{n}$ *menumpu secara pasti dan demikian* $n^{-1} \sum_{m=1}^{n} X_m \to 0$ *secara pasti.*

[25 markah]

- 000 O 000 -