
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
Academic Session 2005/2006

November 2005

MGM 502 – Number Theory
[Teori Nombor]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of **FOUR** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].*

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan].

...2/-

1. Consider the equation

$$2x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad (A)$$

- (i) Using differentiation, or any other methods, show that the equation has exactly one real root.
- (ii) Find the value of a such that the substitution $x = y + a$ produces a cubic equation without the y^2 term.
- (iii) Writing $y = u + v$ with the condition $36uv + 5 = 0$, obtain a second equation in u and v . Hence, solve these simultaneous equations to find u , v and eventually y .
- (iv) Obtain the value of the real root of (A), giving your answer in 8 decimal places. Verify your answer by substitution in (A).

[40 marks]

1. *Pertimbangkan persamaan*

$$2x^3 - x^2 + x - 1 = 0 \quad (A)$$

- (i) *Dengan menggunakan pembezaan atau kaedah lain, tunjukkan bahawa persamaan ini mempunyai tepat satu punca nyata.*
- (ii) *Cari nilai a supaya gantian $x = y + a$ menghasilkan suatu persamaan kubik tanpa sebutan y^2 .*
- (iii) *Menulis $y = u + v$ berserta syarat $36uv + 5 = 0$, dapatkan suatu persamaan kedua dalam u dan v . Dengan yang demikian, selesaikan persamaan serentak ini untuk mendapatkan nilai-nilai u , v dan seterusnya nilai y .*
- (iv) *Dapatkan nilai punca nyata bagi (A), dalam 8 tempat perpuluhan. Semak jawapan anda dengan menggantikannya dalam (A).*

[40 markah]

2. State Peano's Axiom. By using this axiom prove the Well Ordering Principle : "Let S be a nonempty subset of $\mathbb{N}$. Then S contains a smallest element".

[20 marks]

2. Nyatakan Aksiom Peano. Dengan menggunakan aksiom ini, buktikan Prinsip Penyusunan Rapi : "Katakan S suatu subset tak kosong bagi $\mathbb{N}$. maka S mengandungi suatu unsur terkecil".

[20 markah]

...3/-

3. (a) Show that $n^2 - 16$ is a composite number $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Given that p and $p^2 + 2$ are primes, show that $2p^2 \pm 1$ are primes.
- (c) Given that $p, 2p^2 + 3$ and $4p^2 + 9$ are primes, find the smallest prime that is greater than $8p^2 - 1$.
- (d) If $p, p-2$ and $p+2$ are all primes, then the set of these three numbers is called a prime triplet. How many different prime triplets are there in the set of all natural numbers?

[40 marks]

3. (a) Tunjukkan bahawa $n^2 - 16$ suatu nombor komposit $\forall n \in \mathbb{N}$.
- (b) Diberikan p dan $p^2 + 2$ nombor-nombor perdana, tunjukkan bahawa $2p^2 \pm 1$ nombor-nombor perdana.
- (c) Diberikan $p, 2p^2 + 3$ dan $4p^2 + 9$ nombor-nombor perdana, cari nombor perdana paling kecil yang lebih daripada $8p^2 - 1$.
- (d) Jika $p, p-2$ dan $p+2$ nombor-nombor perdana, set tiga nombor ini dipanggil suatu triplet perdana. Berapakah bilangan triplet perdana dalam set nombor jati?

[40 markah]

4. Use Euclid's Algorithm to find the greatest common divisor of 269262 and 435834. Hence write it as $269262\alpha + 435834\beta$ for some $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

[20 marks]

4. Gunakan Algoritma Euclid untuk mencari faktor sepunya terbesar bagi 269262 dan 435834. Dengan itu, tuliskannya sebagai $269262\alpha + 435834\beta$ untuk sesuatu $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$.

[20 markah]

5. Find the number of positive factors of 1080 and the sum of all these factors.

[20 marks]

5. Cari bilangan faktor-faktor positif bagi 1080 dan hasil tambah kesemua faktor ini.

[20 markah]

6. Show that a six-digit number of the form $abcabc$ is divisible by 7, 11 and 13.

[20 marks]

6. Tunjukkan bahawa nombor 6-digit berbentuk $abcabc$ terbahagikan oleh 7, 11 dan 13.

[20 markah]

...4/-

7. Solve the simultaneous linear congruences

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$4x \equiv 5 \pmod{7}$$

[30 marks]

7. Selesaikan kongruens linear serentak

$$x \equiv 2 \pmod{3}$$

$$2x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$4x \equiv 5 \pmod{7}$$

[30 markah]

8. Define the Euler- ϕ function. Hence

(a) Find $\phi(48)$.

(b) Prove that $\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \phi(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Prove that $\phi(n) \leq n - \sqrt{n}$ for every composite positive integer n .

[30 marks]

8. Takrifkan fungsi ϕ – Euler. Dengan itu

(a) Nilaikan $\phi(48)$.

(b) Buktikan bahawa $\frac{\sqrt{n}}{2} \leq \phi(n) \leq n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) Buktikan bahawa $\phi(n) \leq n - \sqrt{n}$ bagi setiap integer komposit positif n .

[30 markah]

- ooo O ooo -