

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2006/2007

Jun 2007

**MGM 502 – Number Theory**  
***[Teori Nombor]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all eight** [8] questions. Each question carries **30 marks.**

**Arahan:** Jawab **semua lapan** [8] soalan. Setiap soalan membawa **30 markah.**

...2/-

1. (a) Consider the simultaneous equations:

$$x + y = a \text{ and } 4xy = b, \text{ where } a \text{ and } b \text{ are constants.} \quad \dots (A)$$

(i) Find  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$  and  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$  in terms of  $a$  and  $b$ .

(ii) Solve (A).

(iii) Using your answer in (ii), find the values of  $x$  and  $y$  when  $a = 3$  and  $b = 8$ .

(iv) Hence, find  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  and  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  in a surd form.

(b) By using your results in (a) or otherwise, factorize completely the polynomial  $x^6 + 6x^4 - 71x^2 + 12$ .

2. State Peano's Axiom, the definition of  $\mathbb{Z}$ , and of addition and multiplication in  $\mathbb{Z}$ . Hence, use this definition to prove the associative property and commutative property of multiplication on  $\mathbb{Z}$ .

3. Find the smallest positive integer  $n$  such that  $2^{2^n} + 1$  is not a prime.

4. Given that  $m$  and  $n$  are integers such that  $m+n$  and  $mn$  are primes, find  $(m+n)^{mn} + (mn)^{(m+n)}$ .

5. Given  $a = 16580861$  and  $b = 62981057$ , find  $(a, b)$  and write it in the form  $\alpha a + \beta b$  for some integers  $\alpha$  and  $\beta$ . Hence solve the Diophantine equation  $ax + by = 1114129$ .

6. (a) Find the number of positive factors of 187272 and the sum of all these factors.

(b) Given  $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$  where  $p, q, r, s$  are distinct primes and  $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ , find the smallest possible value of  $n$  if it has exactly 177859 positive factors.

...3/-

1. (a) Pertimbangkan persamaan serentak:

$$x + y = a \text{ dan } 4xy = b, \text{ di mana } a \text{ dan } b \text{ merupakan pemalar. ... (A)}$$

(i) Cari  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$  dan  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$  dalam sebutan  $a$  dan  $b$ .

(ii) Selesaikan (A).

(iii) Menggunakan jawapan anda dalam (ii), cari nilai-nilai bagi  $x$  dan  $y$  bila  $a = 3$  dan  $b = 8$ .

(iv) Dengan yang demikian, cari  $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$  dan  $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$  dalam bentuk sud.

(b) Dengan menggunakan keputusan anda dalam (a) atau dengan cara lain, faktorkan polinomial  $x^6 + 6x^4 - 71x^2 + 12$  dengan sempurna.

2. Nyatakan aksiom Peano, takrif bagi  $\mathbb{Z}$ , serta bagi penambahan dan pendaraban dalam  $\mathbb{Z}$ . Gunakan takrif anda untuk membuktikan sifat-sifat persekutuan serta kalis tukar tertib bagi operasi pendaraban atas  $\mathbb{Z}$ .

3. Cari integer positif terkecil  $n$  supaya  $2^{2^n} + 1$  bukan nombor perdana.

4. Diberikan  $m$  dan  $n$  merupakan integer-integer supaya  $m+n$  dan  $mn$  adalah nombor perdana, cari nilai  $(m+n)^{mn} + (mn)^{(m+n)}$ .

5. Diberikan  $a = 16580861$  dan  $b = 62981057$ , cari  $(a,b)$  dan tuliskannya dalam bentuk  $\alpha a + \beta b$  bagi integer-integer  $\alpha$  dan  $\beta$ . Dengan itu, selesaikan persamaan Diophantine  $ax + by = 1114129$ .

6. (a) Cari bilangan faktor positif berbeza bagi 187272 serta hasil tambah bagi semua faktor tersebut.

(b) Diberikan  $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ , di mana  $p, q, r, s$  nombor-nombor perdana berbeza dan  $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$ , cari nilai terkecil bagi  $n$  jika ia mempunyai tepat sebilangan 177859 faktor positif.

[10 markah]

...4/-