

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
Academic Session 2006/2007

April 2007

**MGM 502 – Number Theory**  
**[Teori Nombor]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions** : Answer **all eight** [8] questions.

**Arahan** : Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

...2/-

1. (a) Consider the simultaneous equations:  
 $x + y = a$  and  $4xy = b$ , where  $a$  and  $b$  are constants. ... (A)
- (i) Find  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$  and  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$  in terms of  $a$  and  $b$ .
- (ii) Solve (A).
- (iii) Using your answer in (ii), find the values of  $x$  and  $y$  when  $a = 3$  and  $b = 8$ .
- (iv) Hence, find  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  and  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  in a surd form. [8 marks]
- (b) By using your results in (a) or otherwise, factorize completely the polynomial  $x^6 + 6x^4 - 71x^2 + 12$ . [6 marks]
2. State Peano's Axiom and the definition of addition in  $\mathbb{N}$ . Hence, use this definition to prove the associative property and commutative property of addition on  $\mathbb{N}$ . [12 marks]
3. Given that  $n$  is an odd integer, show that  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ . [6 marks]
4. (a) Define primes. [1 mark]
- (b) Given that  $m$  and  $n$  are integers such that  $m+n$  and  $mn$  are primes, find  $(m+n)^{mn} + (mn)^{(m+n)}$ . [5 marks]
- (c) Find three distinct primes whose sum equals a fifth of their product. [6 marks]
5. Given  $a = 2470020408$  and  $b = 1876183662$ , find  $(a, b)$  and write it in the form  $\alpha a + \beta b$  for some integers  $\alpha$  and  $\beta$ . Hence solve the Diophantine equation  $ax + by = 125784$ . [14 marks]

...3/-

1. (a) Pertimbangkan persamaan serentak:  
 $x + y = a$  dan  $4xy = b$ , di mana  $a$  dan  $b$  merupakan pemalar. ... (A)
- (i) Cari  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2$  dan  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$  dalam sebutan  $a$  dan  $b$ .
- (ii) Selesaikan (A).
- (iii) Menggunakan jawapan anda dalam (ii), cari nilai-nilai bagi  $x$  dan  $y$  bila  $a = 3$  dan  $b = 8$ .
- (iv) Dengan yang demikian, cari  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  dan  $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$  dalam bentuk sud.  
 [8 markah]
- (b) Dengan menggunakan keputusan anda dalam (a) atau dengan cara lain, faktorkan polinomial  $x^6 + 6x^4 - 71x^2 + 12$  dengan sempurna.  
 [6 markah]
2. Nyatakan aksiom Peano dan takrif bagi penambahan dalam  $\mathbb{N}$ . Gunakan takrif anda untuk membuktikan sifat-sifat persekutuan serta kalis tukar tertib bagi operasi penambahan atas  $\mathbb{N}$ .  
 [12 markah]
3. Diberikan  $n$  suatu integer ganjil, buktikan  $n^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .  
 [6 markah]
4. (a) Takrifkan nombor perdana.  
 [1 markah]
- (b) Diberikan  $m$  dan  $n$  merupakan integer-integer supaya  $m+n$  dan  $mn$  adalah nombor perdana, cari nilai  $(m+n)^{mn} + (mn)^{(m+n)}$ .  
 [5 markah]
- (c) Cari tiga nombor perdana berbeza yang hasil tambah mereka bernilai satu-per-lima hasil darab mereka.  
 [6 markah]
5. Diberikan  $a = 2470020408$  dan  $b = 1876183662$ , cari  $(a, b)$  dan tuliskannya dalam bentuk  $\alpha a + \beta b$  bagi integer-integer  $\alpha$  dan  $\beta$ . Dengan itu, selesaikan persamaan Diophantine  $ax + by = 125784$ .  
 [14 markah]

...4/-

6. (a) Find the number of positive factors of 17280 and the sum of all these factors.  
[6 marks]

(b) Given  $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma$  where  $p, q, r$  are distinct primes and  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ , find the smallest possible value of  $n$  if it has exactly 105 positive factors.  
[6 marks]

7. (i) Prove that the remainder obtained when the  $n$ -digit positive integer  $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$  is divided by 13 equals the remainder obtained when  $\overline{(a_2a_1a_0 - a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_4a_3)}$  is divided by 13.

(ii) By using the statement in (i), find the remainder obtained when 204372672993 is divided by 13.

(iii) Hence, find the remainder obtained when  $204372672993^{2135902}$  is divided by 13.

[15 marks]

8. Solve the following system of linear congruences:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[15 marks]

...5/-

6. (a) Cari bilangan factor positif berbeza bagi 17280 serta hasil tambah bagi semua factor tersebut.

[6 markah]

- (b) Diberikan  $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma$  di mana  $p, q, r$  nombor-nombor perdana berbeza dan  $\alpha\beta\gamma \neq 0$ , cari nilai terkecil bagi  $n$  jika ia mempunyai tepat sebilangan 105 faktor positif.

[6 markah]

7. (i) Buktikan bahawa baki yang diperoleh apabila integer positif  $n$ -digit  $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2a_1a_0}$  dibahagikan oleh 13 bersamaan nilai baki yang diperoleh apabila  $\left(\overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_4a_3}\right)$  dibahagikan oleh 13.

- (ii) Dengan menggunakan pernyataan di bahagian (i), cari baki yang diperoleh apabila 204372672993 dibahagikan oleh 13.

- (iii) Dengan itu, cari baki yang diperoleh apabila  $204372672993^{2135902}$  dibahagikan oleh 13.

[15 markah]

8. Selesaikan sistem persamaan kongruen linear berikut:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[15 markah]

-000 O 000-