UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2005/2006

April/Mei 2006

MAT 202 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Arahan: *Jawab **semua tiga** [3] soalan.*

.../2-

1. (a) Takrifkan supremum dan infimum bagi satu set $S \subset \mathbb{R}$ (set semua nombor nyata) yang tak kosong. Seterusnya nyatakan aksiom kelengkapan bagi $\mathbb{R}$.

(b) Dengan menggunakan aksiom kelengkapan, buktikan bahawa setiap subset tak kosong pada $\mathbb{R}$ yang dibatasi dari bawah mempunyai infimum.

(c) (i) Dapatkan supremum dan infimum jika wujud bagi setiap set berikut :

(a) $S = \{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}, \mathbb{N} \text{ nombor asli } \}$.

(b) $S = \left\{ \sin x : 0 \le x \le \frac{5\pi}{4} \right\}$.

(ii) Andaikan $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

(a) Dapatkan $f(\{-1\} \cup [1, \infty))$.

(b) Dapatkan praimej $f^{-1}(\mathbb{R})$.

(d) Andaikan A set terbatas dari $\mathbb{R}$ dan buka kosong. Takrifkan $B = \{kx : x \in A, k \in \mathbb{R}\}$, dimana k adalah tetap. Tunjukkan bahawa $\sup B = \sup A + k$ dan $\inf B = \inf A + k$.

(e) Takrifkan keterbilangkan set. Berasaskan kenyataan ini, tunjukkan bahawa kesatuan terbilangkan set-set terbilangkan adalah terbilangkan.

[100 markah]

2. (a) Diberikan $\{a_n\} = \left\{ \frac{2+5n}{8+11n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$.

(i) Buktikan bahawa jujukan ini menumpu.
(ii) Dengan menggunakan takrifan, tentusahkan penumpuan jujukan ini.
(iii) Cari nilai interger terkecil n_0 apabila $\varepsilon = 0.1$.

(b) (i) Biarkan $\{x_n\}$ adalah jujukan Cauchy.

Tunjukkan bahawa jujukan $\{kx_n\}$ adalah Cauchy (dengan k sebarang pemalar).

(ii) Untuk setiap set berikut, dapatkan (jika wujud) titik pedalaman, titik pedalaman, titik had dan titik terpencil :

(a) $(3,6) \setminus \mathbb{Q}$

(b) $\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ n \le 10^6 \}$.

.../3-

(c) (i) Andaikan G dan H adalah subset dari $\mathbb{R}$.
Jika G dan H adalah set terbuka, buktikan bahawa $G \cap H$ adalah juga set terbuka.

(ii) Berikan satu contoh di mana bagi setiap $n \in \mathbb{Z}^+$, set G_n adalah terbuka pada $\mathbb{R}$, tetapi $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ bukan set terbuka.

(d) Tunjukkan bahawa setiap set nombor nyata yang padat adalah terbatas dan juga tertutup. Seterusnya berikan contoh satu set yang padat.

[100 markah]

3. (a) Andaikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ selanjar. Jika A set padat, maka tunjukkan bahawa $f(A)$ juga set padat.

(b) (i) Andaikan $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dengan

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\} \cup [2,3] \text{ dan } f(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ 0, & x \in [0,3] - A. \end{cases}$$

Bincangkan keselanjaran fungsi f pada set A.

(ii) Tunjukkan bahawa fungsi nyata $f(x) = \frac{1}{x^2}$ adalah tak selanjar secara seragam pada $(0, \infty)$.

(c) (i) Dengan menggunakan takrif terbitan, dapatkan terbitan bagi fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$.

(ii) Andaikan S adalah suatu selang dan fungsi $f : S \to \mathbb{R}$ adalah terbezakan dengan $f'(x) \le 0$, $\forall x \in S$. Buktikan bahawa f menyusut pada S.

(d) (i) Diberikan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dan $f(x) = x^2$. Dapatkan hasil tambah atas $A(P:f)$ dan hasil tambah bawah $B(P:f)$ untuk petak $P = \left\{ 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \right\}$.

(ii) Diberikan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ satu fungsi Dirichlet yang ditakrifkan seperti berikut :

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa f tidak terkamirkan pada $[0,1]$.

[100 markah]

-ooo000ooo-