
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2003/2004

September / Oktober 2003

MAT 514 – Pemodelan Matematik
Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab semua tiga soalan.

...2/-

1. Persamaan sebaran pada keadaan mantap diberi oleh

$$a \ddot{y} + by + c = 0, \quad x \in J = [x_0, x_m]. \quad (1)$$

Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan kaedah unsur terhingga seperti berikut

$$\int_{e_i} \underline{N} (a \ddot{y} + by + c) dx = 0, \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, M. \quad (2)$$

Di sini J telah dibahagikan kepada M unsur e_i supaya $J = \bigcup_{i=1}^M e_i$. Tambahan pula

\underline{N} ialah fungsi uji yang ditakrifkan sebagai

$$\underline{N} = (N_1, N_2)^T, \quad N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}, \quad N_2(x) = \frac{x}{L}, \quad (3)$$

untuk $x \in [0, L] = e_i$.

- (a) Tunjukkan bahawa

$$\int_e \begin{pmatrix} \dot{\underline{N}} \times \dot{\underline{N}} \\ \underline{N} \times \underline{N} \end{pmatrix} dx = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\int_e \begin{pmatrix} \underline{N} \times \underline{N} \\ \underline{N} \times \underline{N} \end{pmatrix} dx = \frac{L}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\int_e \underline{N} dx = \frac{L}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Tunjukkan bahawa persamaan (2) dapat diturunkan kepada

$$\sum_{i=1}^M \int_{e_i} \left\{ a \begin{pmatrix} \dot{\underline{N}} \times \dot{\underline{N}} \\ \underline{N} \times \underline{N} \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} \underline{N} \times \underline{N} \\ \underline{N} \times \underline{N} \end{pmatrix} \right\} dx. \{Y\} = \sum_{i=1}^M \int_{e_i} (C \underline{N}) dx + a \underline{N}^{(M)} \dot{y} \Big|_{x_m} - a \underline{N}^{(1)} \dot{y} \Big|_{x_0}$$

(4)

Sekarang pertimbangkan persamaan haba

$$\ddot{y} - 9y = 0, \quad x \in (0.0, 0.3), \quad (5)$$

$$y(0) = 1.0, \quad y(0.3) = e^{-0.9} = 0.4065696 \quad (6)$$

- (c) Terbitkan penyelesaian tepat $y = e^{-3x}$ bagi (5) dan (6).
- (d) Terbitkan persamaan (5) dan (6) melalui kaedah unsur terhingga dengan 3 unsur linear seragam dengan panjang $L = 0.1$ untuk setiap unsur $e_i, i = 1, 2, 3$, dengan menggunakan perisian HEAT04.

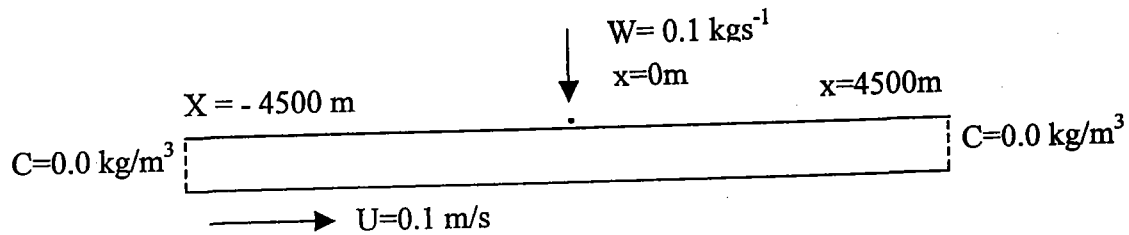
- (e) Ulangi soalan (d) di atas dengan membentuk sistem persamaan linear (4×4)

$$Ax = b. \quad (7)$$

Kemudian gunakan perisian LEQ untuk menyelesaikan sistem (7)

- (f) Bandingkan jawapan (c), (d) dan (e) dalam satu bentuk jadual.
- (g) Gunakan HEAT04 melalui 12 unsur linear dengan $L = 0.025$ untuk mendapat penyelesaian bagi (5) dan (6).
Bandingkan jawapan ini dengan penyelesaian tepat dalam satu jadual.
Bincangkan kejituan dengan jelas.

2. Diberi suatu sungai seragam yang tergambar berikut dengan



ciri-ciri seperti $E = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$, $u = 0.1 \text{ m/s}$, $Q = 1 \text{ m}^3/\text{s}$.

Panjang sungai ini ialah 9000 m.

Satu bahan kimia dilepaskan ke dalam sungai ini pada lokasi $x = 0 \text{ m}$, pada kadar $w = 0.1 \text{ kg s}^{-1}$. Bahan Kimia ini merosot pada kadar $\gamma = 2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

- (a) Terbitkan persamaan aliran-sebaran bagi sungai di atas

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -U \frac{\partial c}{\partial x} + E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \gamma c + w \quad (8)$$

dan berikan unit untuk setiap sebutan.

- (b) Dapatkan penyelesaian tepat bagi persamaan (8) tertakluk kepada syarat-syarat untuk sungai di atas apabila keadaan mantap tercapai iaitu $\frac{\partial c}{\partial t} = 0$.
- (c) Lakarkan penyelesaian di (b) untuk $x \in (-\infty, \infty)$.
- (d) Gunakan kaedah segmen terhingga untuk mendapatkan penyelesaian berangka untuk (b) di atas. Gunakan tiga segmen terhingga yang seragam. Bentukkan sistem linear $Ax = b$ dan selesaikan.
- (e) Ulangi (d) dengan menggunakan perisian I1D1SP dan EIDISP. Bandingkan empat jawapan di bahagian (b), (d) dan (e) dalam satu jadual atau rajah.
- (f) Dapatkan penyelesaian berangka yang lebih jitu melalui IIDISP dan EIDISP dengan 9 segmen dan 90 segmen seragam masing-masing. Bincangkan kejituan masing-masing.

...4/-

(g) Bincangkan kadar penumpuan kaedah EIDISP.

3. Pertimbangkan persamaan haba

$$\frac{d}{dx} \left[KA \frac{dT}{dx} \right] - hp(T - T_{\infty}) = 0, \quad x \in [0, 10\text{cm}] \quad (9)$$

tertakluk kepada syarat-syarat berikut.

$$K = 80 \text{ w/cm}^{\circ}\text{C}, \quad A = \pi \text{ cm}^2, \quad h = 10\text{w/cm}^2/^{\circ}\text{C},$$

$$P = 2\pi \text{ cm}, \quad T(0) = 90^{\circ}\text{C}, \quad T_{\infty} = 0^{\circ}\text{C} \text{ dan } \frac{dT}{dx} = 0 \text{ pada } x = 10\text{cm}$$

- (a) Gunakan kaedah unsur terhingga melalui perisian HEAT04 dengan 10 unsur seragam untuk menyelesaikan (9). Bandingkan jawapan ini dengan jawapan analitik, melalui satu jadual dan satu rajah.
- (b) Ulangi soal di atas dengan $T_{\infty} = 30^{\circ}\text{C}$.
- (c) Selesaikan persamaan haba (9) dengan kaedah EIDISP dan IIDISP dengan 10 segmen seragam. Bandingkan ketiga-tiga jawapan.
- (d) Bincangkan kejituan ketiga-tiga kaedah di atas.
- (e) Dapatkan penyelesaian berangka melalui HEAT04, IIDISP dan EIDISP yang lebih jitu untuk (9). Tunjukkan jawapan melalui satu jadual.

- 000 O 000 -