

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
Academic Session 2005/2006

November 2005

**MAT 514 – Mathematical Modelling**  
***[Pemodelan Matematik]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of **FIVE** pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions :** Answer all **FIVE [5]** questions.

***[Arahan :*** Jawab semua **LIMA [5]** soalan].

...2/-

1. An iron slab of elliptic shape can fit exactly into the rectangular region  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 6$  (length scale is in cm). The slab is heated to a uniform temperature of  $200^\circ \text{C}$ . Suppose that at time  $t = 0$ , the temperature at the boundary is brought to  $0^\circ \text{C}$  and this temperature is maintained for all time at the boundary. Suppose no heat is allowed to escape from the slab by radiation. Given that the thermal diffusivity of iron is  $0.12 \text{ cm}^2/\text{s}$ .
- Formulate the mathematical model for computing temperature on the slab at any time  $t$ .
  - Draw the rectangular grid system by choosing  $\Delta x = \Delta y = 1.0 \text{ cm}$  and thus show the boundary of the slab for a finite difference scheme.
  - Develop an explicit finite difference scheme for solving the problem and choose  $\Delta t$  so that the stability of the scheme is ensured.

[12 marks]

1. *Suatu jasad besi bentuk eliptik boleh disuaikan ke dalam rantau segi empat tepat  $0 \leq x \leq 10$ ,  $0 \leq y \leq 6$  (skala jarak ialah dalam cm). Jasad dihangatkan ke suhu sekata  $200^\circ \text{C}$ . Andaikan pada masa  $t = 0$ , suhu di sempadan dijadikan  $0^\circ \text{C}$  dan suhu ini dikekalkan. Andaikan tiada haba dibenarkan mengalir keluar daripada jasad melalui radiasi. Diberi "thermal diffusivity" besi ialah  $0.12 \text{ cm}^2/\text{s}$ .*

- Bangunkan model matematik untuk mengira suhu atas jasad pada sebarang masa  $t$ .*
- Lakarkan sistem grid segi empat sama dengan memilih  $\Delta x = \Delta y = 1.0 \text{ cm}$  dan tunjukkan sempadan jasad untuk suatu skema beza terhingga.*
- Bangunkan suatu kaedah beza terhingga tak tersirat untuk menyelesaikan masalah ini dan pilih  $\Delta t$  sedemikian kestabilan skema dipastikan*

[12 markah]

2. Consider a part of a sea having a long straight shore and that the variation of seawater motion parallel to the shore is negligible. Develop a one-dimensional model for the region from the coast to a distance of 1000 km towards the sea using the vertically integrated nonlinear shallow water equations including the bottom stress term. Associate appropriate boundary and initial conditions for the following cases:
- to incorporate a tsunami source within the model region,
  - to incorporate tidal oscillation along the open boundary.

Write down an explicit numerical scheme for solving the model equations using an appropriate staggered grid system. Write down the CFL criterion of numerical stability and explain its significance.

[12 marks]

2. *Pertimbangkan sebahagian suatu lautan yang mempunyai pesisir lurus panjang dan pergerakan air laut selari dengan pesisir boleh diabaikan. Bangunkan model satu dimensi untuk rantau dari pesisir ke suatu jarak 1000 km dari pesisir menggunakan persamaan air cetek tak linear yang dikamirkan. Sekutukan syarat-syarat sempadan dan awal yang bersesuaian untuk kes-kes berikut :*

...3/-

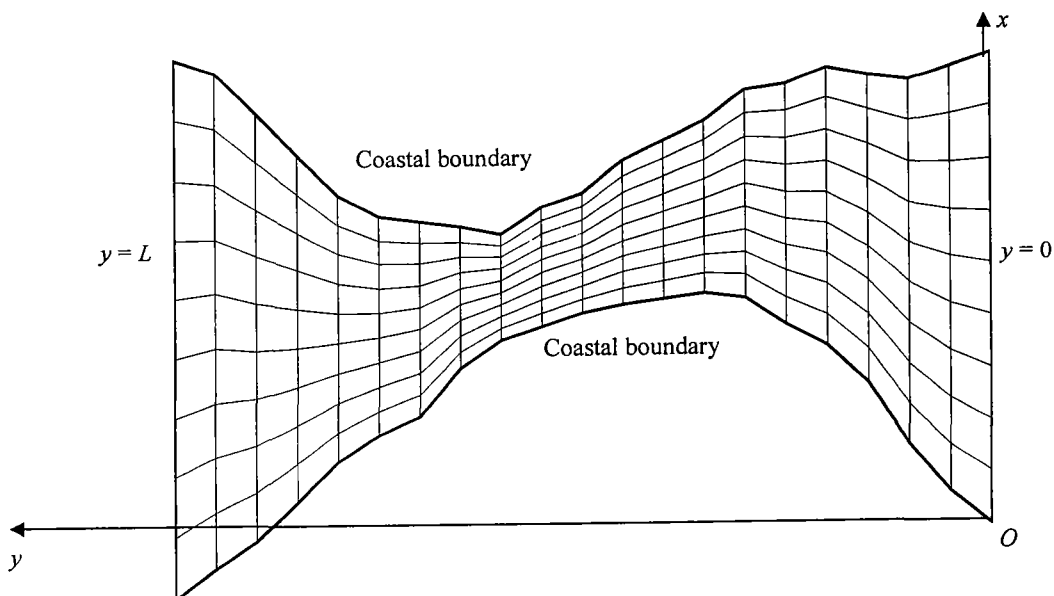
- (a) untuk memasukan sumber tsunami dalam rantau yang dimodel.  
 (b) untuk memasukan ayunan pasang surut sepanjang rantau terbuka.

Tuliskan suatu skema berangka tak tersirat untuk menyelesaikan persamaan model menggunakan sistem grid yang "staggered". Tuliskan syarat kestabilan CFL dan terangkan kepentingannya.

[12 markah]

3. The figure shows a model domain including the boundaries, non-orthogonal boundary fitted grid system and the coordinate system, where the coordinate frame is at the mean water level.

- (a) Represent the curvilinear boundaries by two functions.  
 (b) Write the mathematical model using vertically integrated shallow water equations for wind driven circulation, neglecting bed friction. Along each coastal boundary consider that the normal component of velocity is zero; along  $y = 0$  and  $y = L$  incorporate open boundary conditions.  
 (c) Use an appropriate transformation so that the model area becomes a rectangle and the grid system becomes rectangular. Derive the equations and the boundary conditions in the transformed domain. Discuss briefly about the advantage of this transformation.

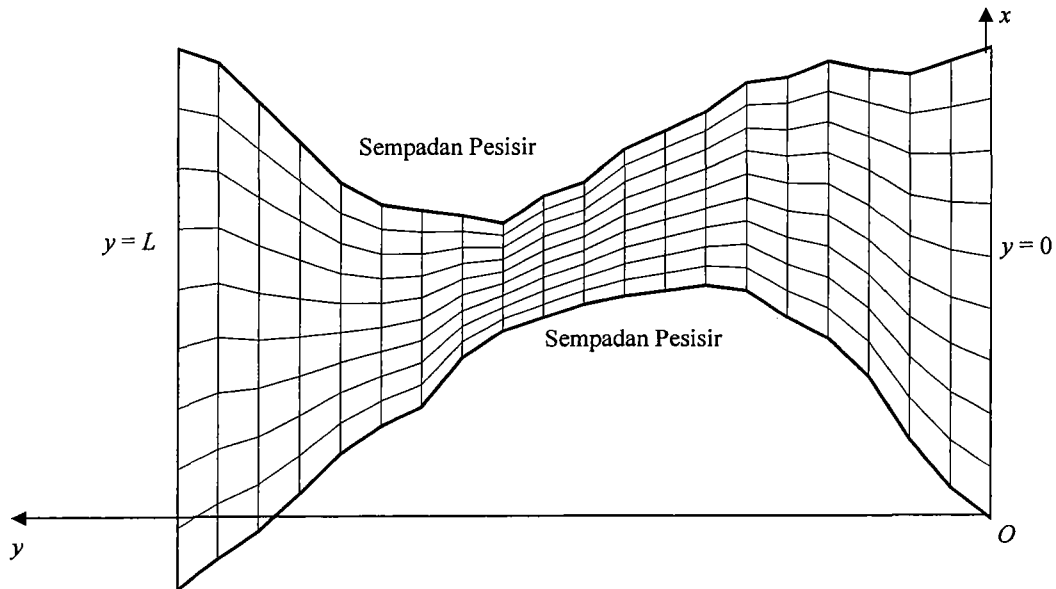


[12 marks]

3. Rajah menunjukkan suatu domain model yang termasuk sempadan, sistem grid sesuai bersempadan yang tak berortogon dan sistem koordinat, dengan kerangka koordinat pada tahap purata air.

...4/-

- (a) *Wakilkan sempadan curvilinear dalam rajah menggunakan dua fungsi.*
- (b) *Tulis model matematik menggunakan persamaan air cetek yang dikamir secara menegak untuk sirkulasi disebabkan angin. Abaikan geseran dasar. Sepanjang setiap sempadan pesisir anggapkan komponen normal halaju ialah sifar; sepanjang  $y = 0$  and  $y = L$  masukkan syarat sempadan terbuka.*
- (c) *Dengan menggunakan penjelmaan yang sesuai sedemikian kawasan model menjadi segiempat tepat dan sistem grid turut menjadi segiempat tepat. Terbitkan persamaan dan syarat-syarat sempadan dalam domain yang dijelmakan. Bincangkan kelebihan penjelmaan ini.*



[12 markah]

4. Derive the one-dimensional mass transport equation, for a substance well mixed with a fluid, involving advection, diffusion, generation and depletion terms. Hence write down the three-dimensional form of the equation.

[12 marks]

4. *Terbitkan persamaan pengangkutan satu dimensi untuk suatu bahan yang bercampur dengan baik dengan suatu bendalir dan melibatkan olahan, sebaran, penjanaan dan susutan. Seterusnya tulis bentuk tiga-dimensi persamaan ini.*

[12 markah]

...5/-

5. The chemical benzyl chloride is discharged through a multiple diffuser into a channel at a rate of  $I = 1.2$  kg/h. The benzyl chloride reacts with the channel water and produces benzyl alcohol; the reaction rate is proportional to the concentration and the proportionality constant is  $k = 0.046$  h<sup>-1</sup> at normal temperature. In addition, benzyl chloride is transferred to the atmosphere through the water-air interface at the rate  $k_m C/H$ , where  $k_m = 6 \times 10^{-5}$  m/s is the mass transfer coefficient,  $C$  is the concentration of benzyl chloride, and  $H$  is the mean channel depth.
- (a) Considering only the advective flux in a one-dimensional laminar flow, develop a mathematical model for estimating the benzyl chloride concentration at the downstream at any time.
- (b) Solve analytically the corresponding steady state problem and estimate the concentration of benzyl chloride 5 km downstream from the discharge point. Given that the channel has a discharge  $Q_r = 25$  m<sup>3</sup>/s, an average cross-sectional area of 20 m<sup>2</sup> with a mean depth of 1 m.

[12 marks]

5. *Benzyl Chloride di discaj daripada suatu multiple diffuser ke dalam suatu saluran pada kadar  $I = 1.2$  kg/h. Benzyl Chloride bereaksi dengan air saluran dan menghasilkan Benzyl alcohol; kadar reaksi berkadar dengan konsentrasi dan pemalar kadaran ialah  $k = 0.046$  jam<sup>-1</sup> pada suhu biasa. Tambahan itu, Benzyl Chloride tersebut turut dipindahkan ke atmosfera melalui permukaan air-udara pada kadar  $k_m C/H$ , dengan  $k_m = 6 \times 10^{-5}$  m/s ialah pekali pemindahan jisim,  $C$  ialah konsentrasi Benzyl Chloride dan  $H$  ialah kedalaman purata saluran.*

- (a) *Dengan hanya mempertimbangkan fluks olahan dalam aliran laminar satu dimensi, bangukan model matematik untuk menganggarkan konsentrasi Benzyl Chloride pada sesuatu masa.*
- (b) *Selesaikan secara analisis masalah mantap yang sepadan dan anggarkan konsentrasi Benzyl Chloride 5 km ke hilir daripada titik discaj. Diberi  $Q_r = 25$  m<sup>3</sup>/s, luas keratan rentas sebanyak 20 m<sup>2</sup> dan kedalaman purata 1 m.*

[12 markah]

-0000000-