UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2005/2006

November 2005

MAT 363 – Pentaabiran Statistik

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

...2/-

1. (a) Jika pembolehubah rawak Z bertaburan normal piawai, pembolehubah rawak W bertaburan khi kuasa dua dengan s darjah kebebasan dan Z dan W adalah saling tak bersandar, apakah taburan untuk $X = \dfrac{Z}{\sqrt{W/s}}$, $-\infty < x < \infty$. Seterusnya, cari $E(X)$ dan $\mathrm{Var}(X)$.

[30 markah]

(b) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ mewakili suatu sampel rawak daripada taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian sepunya

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x}, & x > 0 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Tunjukkan bahawa $X_{(r)}$ dan $X_{(s)} - X_{(r)}$ adalah tak bersandar dengan menggunakan teorem pemfaktoran yang mana $X_{(r)}$ dan $X_{(s)}$ masing-masing mewakili statistik tertib ke-r dan ke-s dengan $1 < r < s < n$.

[30 markah]

(c) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi pembolehubah rawak X ialah

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-x}\left(1 - e^{-x}\right), & x > 0 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

(i) Cari fungsi penjana momen untuk pembolehubah rawak X.
(ii) Cari $E(X)$ berdasarkan jawapan dalam (i).

[20 markah]

(d) Biarkan $\{X_n\}$ mewakili suatu jujukan pembolehubah rawak dengan fungsi ketumpatan diskrit

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{2n} \text{ dan } P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2n}.$$

Tunjukkan bahawa X_n menumpu secara kebarangkalian kepada 0.

[20 markah]

2. (a) Biarkan X mewakili suatu pembolehubah rawak daripada taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $-\infty < x < \infty$. Cari fungsi ketumpatan kebarangkalian untuk $Y = X^2$ dengan menggunakan teknik fungsi penjana momen.

[30 markah]

(b) Suatu sampel rawak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ diambil daripada taburan seragam selanjar dengan fungsi ketumpatan $f(x) = \dfrac{1}{\beta}$, $0 < x < \beta$.

(i) Cari $E(Y_n)$ dengan Y_n mewakili statistik tertib ke-n.

...3/-

(ii) Berdasarkan jawapan dalam bahagian (i), cari suatu penganggar saksama untuk β.

(iii) Tunjukkan bahawa $2\overline{X}$ adalah juga suatu penganggar saksama untuk β.

(iv) Antara penganggar saksama yang diperoleh dalam bahagian (ii) dan (iii), yang manakah lebih cekap?

[50 markah]

(c) Andaikan X_1 dan X_2 merupakan pembolehubah rawak daripada taburan Poisson, $P(\alpha)$. Adakah $X_1 + 2X_2$ statistik cukup untuk α? Berikan alasan anda.

[20 markah]

3. (a) Biarkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ menandai sampel rawak daripada taburan $N(\mu, 1)$. Tunjukkan bahawa varians minimum sebarang penganggar saksama μ^2 daripada ketaksamaan Cramer-Rao ialah $\dfrac{4\mu^2}{n}$.

[20 markah]

(b) Katakan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sampel rawak daripada taburan sepunya dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{-1} x^{(2\theta-1)/(1-\theta)}, & 0 < x \le 1,\ \frac{1}{2} < \theta < 1 \\ 0 & , \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Cari penganggar kebolehjadian maksimum bagi θ.

[20 markah]

(c) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan $G(5,\theta)$. Dengan menggunakan min sampel $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, terbitkan

(i) selang keyakinan hampiran $100\gamma\%$ $(0 < \gamma < 1)$ bagi θ apabila n besar.

(ii) selang keyakinan $100\gamma\%$ $(0 < \gamma < 1)$ bagi θ apabila n kecil.

[40 markah]

(d) (i) Takrifkan kuantiti pangsian.

(ii) Andaikan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel rawak daripada taburan $N(1, \sigma^2)$ dengan nilai σ^2 tidak diketahui. Adakah pembolehubah rawak $\dfrac{\overline{X}}{\sigma}$ suatu kuantiti pangsian? Jelaskan.

[20 markah]

4. (a) Biarkan $Y_1 \le Y_2 \le Y_3 \le Y_4 \le Y_5$ menandai statistik tertib bagi sampel rawak saiz 5 daripada taburan dengan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{di tempat lain}\end{cases}.$$

Biarkan y_5 mewakili nilai Y_5 yang dicerap untuk menguji $H_0:\theta=1$ lawan $H_1:\theta\neq 1$. Ujian yang digunakan adalah berdasarkan rantau genting $C=\left\{y_5 : y_5 \le \frac{1}{2} \text{ atau } y_5 \ge 1\right\}$. Cari fungsi kuasa $\pi(\theta)$, $\theta > 0$ bagi ujian ini. Seterusnya, cari saiz ujian ini.

[25 markah]

(b) Biarkan $X_1, X_2, ..., X_n$ mewakili suatu sampel rawak saiz n daripada taburan normal dengan varians, $\sigma^2 = 1$ dan fungsi ketumpatan kebarangkalian

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Cari rantau genting paling berkuasa saiz-α bagi menguji $H_0:\mu=\mu_0$ lawan $H_1:\mu=\mu_1$ yang mana $\mu_1 > \mu_0$, dengan menggunakan lemma Neyman-Pearson.

[25 markah]

(c) Berdasarkan sampel rawak saiz 20 daripada taburan $N(0,\sigma^2)$, cari ujian paling berkuasa secara seragam (UPBS) bersaiz $\alpha = 0.1$ bagi menguji $H_0:\sigma^2=1$ lawan $H_1:\sigma^2>1$.

[25 markah]

(d) Andaikan cerapan tunggal, X bertaburan binomial, $b(n, \theta)$ dengan fungsi ketumpatan diskrit

$$f(x;\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}, \quad x=0,1,2,...,n.$$

Cari ujian nisbah kebolehjadian bagi menguji $H_0:\theta\le\theta_0$ lawan $H_1:\theta>\theta_0$.

[25 markah]

Taburan	Fungsi Ketumpatan	Min	Varians	Fungsi Penjana Momen
Seragam Diskrit	$f(x) = \frac{1}{N} I_{\{1,2,\cdots,N\}}(x)$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N^2-1}{12}$	$\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{N} e^{jt}$
Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x} I_{\{0,1\}}(x)$	p	pq	$q + pe^t$
Binomial	$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} I_{\{0,1,\cdots,n\}}(x)$	np	npq	$(q + pe^t)^n$
Geometri	$f(x) = pq^x I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	$\frac{q}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{p}{1-qe^t}, \ qe^t < 1$
Poisson	$f(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} I_{\{0,1,\cdots\}}(x)$	λ	λ	$exp\{\lambda(e^t - 1)\}$
Seragam	$f(x) = \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}, \ t \neq 0$
Normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\{-(x-\mu)^2/2\sigma^2\} I_{(-\infty,\infty)}(x)$	μ	σ^2	$exp\{\mu t + (\sigma t)^2/2\}$
Eksponen	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda - t}, \ t < \lambda$
Gama	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x} x^{\alpha-1} I_{(0,\infty)}(x)$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha, \ t < \lambda$
Khi Kuasa Dua	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r/2} \frac{1}{\Gamma(r/2)} e^{-x/2} x^{(r/2)-1} I_{(0,\infty)}(x)$	r	$2r$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{r/2}, \ t < \frac{1}{2}$
Beta	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} I_{(0,1)}(x)$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$	