
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2005/2006

November 2005

MAT 263 – Teori Kebarangkalian

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua empat** soalan.

...2/-

1. (a) Jika $P(E) = 0.9$ dan $P(F) = 0.8$

(i) tunjukkan bahawa $P(E \cap F) \geq 0.7$.

(ii) Secara am, buktikan ketaksamaan Bonferroni,

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1$$

[10 markah]

(b) Buktikan ketaksamaan Boole

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

[10 markah]

(c) Jika X adalah pembolehubah rawak geometri dengan parameter p , tunjukkan bahawa:

$$E\left[\frac{1}{X}\right] = \frac{p \log(p)}{1-p}$$

[Petunjuk: Nilaikan suatu kembangan berbentuk $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i}$. Untuk menyelesaikan

kembangan ini, tuliskan $\frac{a^i}{i} = \int_0^a x^{i-1} dx$, dan kemudian tukarkan hasil tambah dan kamiran.]

[30 markah]

(d) Jika $P\{X = a\} = p$, $P\{X = b\} = 1 - p$

(i) Tunjukkan bahawa $\frac{X-b}{a-b}$ adalah pembolehubah Bernoulli

(ii) Cari $\text{Var}(X)$

[25 markah]

2. (a) Hitung $E[X]$ jika X mempunyai fungsi ketumpatan seperti berikut:

$$(i) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x^2}, & x > 5 \\ 0, & x \leq 5 \end{cases}$$

[15 markah]

...3/-

- (b) Kelajuan suatu molekul dalam gas yang seragam pada keseimbangan adalah pembolehubah rawak dengan fungsi ketumpatan kebarangkaliannya diberikan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 e^{-bx^2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

yang mana $b = \frac{m}{2kT}$ dan k , T , dan m , masing-masing menandakan, Pemalar Boltzmann, suhu mutlak, dan jisim molekul. Nilaikan a dalam bentuk b .

[25 markah]

- (c) Pembolehubah rawak X mempunyai fungsi ketumpatan kebarangkalian,

$$f(x) = \begin{cases} ax + bx^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{di tempat lain} \end{cases}$$

Jika $E[X] = 0.6$, cari

- (i) $P\left\{X < \frac{1}{2}\right\}$
 (ii) $\text{Var}(X)$

[20 markah]

- (d) Andaikan bahawa fungsi taburan longgokan bagi pembolehubah rawak X diwakili oleh,

$$F(x) = 1 - e^{-x^2} \quad x > 0$$

Nilaikan:

- (i) $P\{X > 2\}$
 (ii) $P\{1 < X < 3\}$
 (iii) $E[X]$
 (iv) $\text{Var}(X)$

[40 markah]

3. (a) Buktikan

$$P\{a_1 < X \leq a_2, b_1 < Y \leq b_2\} = F(a_2, b_2) + F(a_1, b_1) - F(a_1, b_2) - F(a_2, b_1)$$

apabila $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$

[40 markah]

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi X dan Y diberikan oleh:

$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)e^{-y}, \quad -y \leq x \leq y, \quad 0 < y < \infty$$

...4/-

- (i) Cari c
 (ii) Cari ketumpatan sut bagi X dan Y
 (iii) Cari $E[X]$

[30 markah]

- (c) Jika X_1 dan X_2 adalah pembolehubah-pembolehubah rawak eksponen tak bersandar, masing-masing mempunyai parameter λ :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{jika } x \geq 0 \\ 0, & \text{jika } x < 0 \end{cases}$$

cari fungsi ketumpatan tercantum bagi $Y_1 = X_1 + X_2$ dan $Y_2 = e^{X_1}$

[30 markah]

- (d) Fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum X dan Y diberikan sebagai:

$$f(x, y) = \frac{1}{y} e^{-\left(y + \frac{x}{y}\right)}, \quad x > 0, \quad y > 0$$

Tentukan $E[X]$, $E[Y]$ dan tunjukkan bahawa $Kov(X, Y) = 1$.

[25 markah]

4. (a) Fungsi Penjana Momen X diberikan sebagai $M_X(t) = e^{ks\{2e^t - 2\}}$ dan Y oleh

$$M_Y(t) = \left(\frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}\right)^{10}. \text{ Jika } X \text{ dan } Y \text{ saling tak bersandar, Nilaiakan:}$$

- (i) $P\{X + Y = 2\}$
 (ii) $P\{XY = 0\}$
 (iii) $E[XY]$

[30 markah]

- (b) Fungsi ketumpatan kebarangkalian tercantum bagi X dan Y diberikan sebagai

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}}, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty$$

- (i) Kirakan fungsi penjana momen tercantum bagi X dan Y .
 (ii) Kirakan fungsi penjana momen sut bagi X dan Y

[20 markah]

...5/-

(c) Jika $Y = a + bX$, tunjukkan bahwa

$$\rho(X, Y) = \begin{cases} +1, & \text{jika } b > 0 \\ -1, & \text{jika } b < 0 \end{cases}$$

[20 markah]

(d) Jika

$E[X] = 75$, $E[Y] = 75$, $Var(X) = 10$, $Var(Y) = 12$, $Cov(X, Y) = -3$
berikan suatu batas atas untuk :

- i. $P\{|X - Y| > 15\}$;
- ii. $P\{X > Y + 15\}$;
- iii. $P\{Y > X + 15\}$.

[30 markah]

- 000 O 000 -