

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination  
Academic Session 2006/2007

April 2007

**MAT 263 – Probability Theory**  
**[Teori Kebarangkalian]**

Duration : 3 hours  
[Masa : 3 jam]

---

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions :** Answer **all four** [4] questions.

**Arahan** : Jawab **semua empat** [4] soalan.]

...2/-

1. (a) Let  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ , zero elsewhere be the probability distribution function (p.d.f.) of a random variable  $X$ .
- Find the distribution function,  $F(x)$ .
  - If  $m$  is a number such that  $F(m) = \frac{1}{2}$ , find the number  $m$ , which is the median of the distribution.
  - Find the p.d.f. of  $Y = 1 - F(X)$ .

[35 marks]

- (b) A box contains 4 balls numbered 1, 2, 3 and 4. Two balls are taken at random from the box, one at a time and without replacement. Let  $A$  denotes the event of getting balls numbered 1 and 2,  $B$  denotes the event of getting balls numbered 1 and 3 and  $C$  denotes the event of getting balls numbered 1 and 4.
- Show that  $P(A) = P(B) = P(C)$ .
  - Show that the events are pairwise independent but the three events are not mutually independent.

[30 marks]

- (c) Let  $X$  be distributed as the uniform distribution in the interval  $(0, 10)$ , with p.d.f.

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad 0 < x < 10$$

$$= 0, \quad \text{elsewhere}$$

- Find the mean and variance of  $X$ .
- Using Chebyshev's inequality, find the upper bound for  $P(|X - 5| > 4)$ .
- Compare the upper bound in part (ii) with the exact probability  $P(|X - 5| > 4)$ .

[35 marks]

...3/-

1. (a) Andaikan  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x > 0$ , sifar di tempat lain, sebagai fungsi ketumpatan kebarangkalian (f.k.k.) bagi pemboleh ubah rawak  $X$ .

(i) Dapatkan fungsi taburan,  $F(x)$ .

(ii) Jika  $m$  merupakan satu nombor supaya  $F(m) = \frac{1}{2}$ , dapatkan nombor  $m$  tersebut, iaitu median taburan ini.

(iii) Dapatkan f.k.k. bagi  $Y = 1 - F(X)$ .

[35 markah]

(b) Sebuah kotak mengandungi 4 biji bola yang bernombor 1, 2, 3 dan 4. Dua biji bola diambil secara rawak dari kotak ini, sebiji demi sebiji dan tanpa pengembalian. Andaikan  $A$  menandakan peristiwa mendapat bola bernombor 1 dan 2,  $B$  menandakan peristiwa mendapat bola bernombor 1 dan 3 dan  $C$  menandakan peristiwa mendapat bola bernombor 1 dan 4.

(i) Tunjukkan bahawa  $P(A) = P(B) = P(C)$ .

(ii) Tunjukkan bahawa peristiwa-peristiwa tersebut adalah tak bersandar secara berpasangan, tetapi ketiga-tiga peristiwa adalah bersandar.

[30 markah]

(c) Andaikan  $X$  tertabur secara taburan seragam dalam selang  $(0, 10)$ , dengan f.k.k.

$$f(x) = \frac{1}{10}, \quad 0 < x < 10$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain}$$

(i) Dapatkan min dan varians bagi  $X$ .

(ii) Dengan menggunakan ketaksamaan Chebyshev's, dapatkan batas atas bagi  $P(|X - 5| > 4)$ .

(iii) Bandingkan batas atas di bahagian (ii) dengan kebarangkalian tepat  $P(|X - 5| > 4)$ .

[35 markah]

...4/-

2. (a) Let  $X$  and  $Y$  be two discrete random variables with the joint p.d.f. described as follows:

	$x=1$	$x=2$
$y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$y=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

- (i) Find the marginal p.d.f. of  $X$  given  $Y = y$ ,  $y = 1, 2$ .  
(ii) Are  $X$  and  $Y$  independent?  
(iii) Compute  $P(XY \leq 3)$  and  $P(X + Y > 2)$

[40 marks]

- (b) The joint p.d.f. of  $X$  and  $Y$  is given by

$$f(x, y) = 2, \quad 0 < x < y, \quad 0 < y < 1$$

$$= 0, \quad \text{elsewhere}$$

- (i) Find the marginal p.d.f. of  $X$  and the marginal p.d.f. of  $Y$ .  
(ii) Show that  $X$  and  $Y$  are dependent.  
(iii) Find the conditional p.d.f. of  $X$  given  $Y = y$ . Hence, find the conditional mean of  $X$  given  $Y = y$ .

[40 marks]

- (c) Let  $A$ ,  $B$  and  $C$  be three events with  $P(A|C) \geq P(B|C)$  and  $P(A|C') \geq P(B|C')$ . Show that  $P(A) \geq P(B)$ .

[20 marks]

...5/-

2. (a) Andaikan  $X$  dan  $Y$  sebagai dua pemboleh ubah rawak dengan f.k.k. tercantum seperti berikut:

	$x=1$	$x=2$
$y=1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
$y=2$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$

- (i) Dapatkan f.k.k. sut bagi  $X$  diberi  $Y = y$ ,  $y = 1, 2$ .  
(ii) Adakah  $X$  dan  $Y$  tak bersandar?  
(iii) Hitung  $P(XY \leq 3)$  dan  $P(X + Y > 2)$

[40 markah]

- (b) F.k.k. tercantum bagi  $X$  dan  $Y$  diberikan oleh

$$f(x, y) = 2 \quad , \quad 0 < x < y \quad , \quad 0 < y < 1$$

$$= 0 \quad , \quad \text{di tempat lain}$$

- (i) Dapatkan f.k.k. sut bagi  $X$  dan f.k.k. bagi  $Y$ .  
(ii) Tunjukkan bahawa  $X$  dan  $Y$  adalah bersandar.  
(iii) Dapatkan f.k.k. bersyarat bagi  $X$  diberikan  $Y = y$ . Seterusnya, dapatkan min bersyarat bagi  $X$  diberi  $Y = y$ .

[40 markah]

- (c) Andaikan  $A$ ,  $B$  dan  $C$  sebagai tiga peristiwa dengan  $P(A|C) \geq P(B|C)$  dan  $P(A|C') \geq P(B|C')$ . Tunjukkan bahawa  $P(A) \geq P(B)$ .

[20 markah]

...6/-

3. (a) Let the random variable  $X$  be the proportion of correct answers obtained by a student in a test. The p.d.f. of  $X$  is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ elsewhere} \end{cases}$$

- (i) Find the distribution function of  $X$ .  
 (ii) A student will pass the test if at least 60% of the answers are correct. Find the probability that a student who sits for the test will pass the test.  
 (iii) If 10 students took the test, what is the probability that at least 8 of them will pass the test?  
 (iv) Show that the mean, median and mode for this distribution is 0.5. Find its variance.  
 (v) If  $Y = 2X + 1$ , find the p.d.f. of  $Y$  by using the distribution function technique.

[70 marks]

- (b) Let  $m(t)$  be the moment generating function (m.g.f.) of a random variable  $X$  with p.d.f.  $f(x)$ . Show that  $m(0) = 1$ . If  $\varphi(t) = \ln m(t)$ , where  $m(t)$  is the m.g.f. of  $X$ , show that  $\varphi'(0) = \mu$  and  $\varphi''(0) = \sigma^2$ .

[30 marks]

...7/-

3. (a) Andaikan pemboleh ubah rawak  $X$  sebagai kadar jawapan betul yang diperoleh oleh seorang pelajar bagi suatu ujian. F.k.k. bagi  $X$  ditakrifkan oleh

$$f(x) = 6x(1-x), \quad 0 < x < 1 \\ = 0, \quad \text{di tempat lain}$$

- (i) Dapatkan fungsi taburan bagi  $X$ .  
 (ii) Seorang pelajar akan lulus ujian ini jika dia mendapat sekurang-kurangnya 60% jawapan betul. Dapatkan kebarangkalian bahawa seorang pelajar yang mengambil ujian ini akan lulus.  
 (iii) Jika 10 orang pelajar mengambil ujian ini, apakah kebarangkalian bahawa sekurang-kurangnya 8 orang akan lulus?  
 (iv) Tunjukkan bahawa min, median dan mod bagi taburan ini adalah 0.5.  
 Dapatkan juga variansnya.  
 (v) Jika  $Y = 2X + 1$ , dapatkan f.k.k. bagi  $Y$  dengan menggunakan teknik fungsi taburan.

[70 markah]

- (b) Andaikan  $m(t)$  sebagai suatu fungsi penjana momen (f.p.m.) bagi pemboleh ubah rawak  $X$  dengan f.k.k.  $f(x)$ . Tunjukkan bahawa  $m(0) = 1$ . Jika  $\varphi(t) = \ln m(t)$ , dengan  $m(t)$  sebagai f.p.m.  $X$ , tunjukkan bahawa  $\varphi'(0) = \mu$  dan  $\varphi''(0) = \sigma^2$ .

[30 markah]

...8/-

4. (a) Andaikan  $X_1$  dan  $X_2$  sebagai dua pemboleh ubah rawak masing-masing dengan min  $\mu_1$  dan  $\mu_2$  dan varians  $\sigma_1^2$  dan  $\sigma_2^2$ .

(i) Anggapkan  $X_1$  dan  $X_2$  sebagai pemboleh ubah tak bersandar.

a. Dapatkan min dan varians bagi  $Y = X_1 X_2$ .

b. Jika  $Y = X_1 + X_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \frac{7}{2}$  dan  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \frac{35}{12}$ ,  
dapatkan  $E[Y]$  dan  $\text{Var}(Y)$ .

c. Jika  $X_1$  dan  $X_2$  mempunyai f.k.k. yang sama, iaitu

$$f(x, y) = \frac{1}{6}, \quad x = 1, 2, \dots, 6$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain}$$

Dapatkan f.p.m. bagi  $Y = X_1 + X_2$

(ii) Jika  $X_1$  dan  $X_2$  merupakan pemboleh ubah bersandar dengan pekali korelasi  $\rho$ , tunjukkan bahawa varians bagi  $Y = X_1 + X_2$  adalah

$$\text{Var}(Y) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2$$

[60 markah]

(b) Andaikan f.k.k. tercantum bagi  $X$  and  $Y$  diberikan oleh

$$f(x, y) = \frac{1}{\beta^2} e^{-(x+y)/\beta}, \quad x > 0, y > 0, \beta > 0$$

$$= 0, \quad \text{di tempat lain}$$

Dapatkan f.k.k. tercantum bagi  $U = \frac{X - Y}{2}$  dan  $V = Y$ .

[40 markah]

-ooo000ooo-