UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang Akademik 2005/2006

November 2005

MAT 222 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **semua TIGA** soalan.

...2/-

1. (a) Pertimbangan sistem persamaan pembezaan berikut

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X$$

(i) Cari matriks asasi persamaan di atas

(ii) Cari penyelesaian am sistem tak homogen berikut menggunakan kaedah ubahan parameter,

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ te^{t} \end{pmatrix}$$

(b) Pertimbangkan,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Biar $X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$

(i) Tulis persamaan pembezaan di atas dalam bentuk sistem $X' = AX + F$ dengan A dan F fungsi matriks yang ditentukan.

(ii) Penyelesaian khusus kepada system yang anda tuliskan dalam bahagian b(i) diberikan dalam bentuk

$$X_p = \Phi \int \Phi^{-1} F \, dx \qquad (2)$$

dimana Φ ialah matriks asasi sistem homogen yang setara. Tunjukkan bahawa persamaan (2) memberikan penyelesaian khusus kepada (1) dalam bentuk

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

dimana y_1 dan y_2 adalah penyelesaian asasi kepada (1), dan ,

$$u_1' = \frac{w_1}{w}, \quad u_2' = \frac{w_2}{w}$$

dimana $$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad w_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

[100 markah]

2. (a) Pertimbangkan sistem berotonomi berikut

$$x' = -\alpha x + xy$$
$$y' = 1 - \beta y - x^2$$

Tunjukan bahawa sistem ini mempunyai titik kritikal yang unik apabila $\alpha\beta > 1$ dan titik ini stabil apabila $\beta > 0$.

(b) Untuk sistem berotonomi di bawah, cari semua titik kritikalnya dan klasifikasikan setiap titik tersebut sebagai stabil, stabil berasimptot atau tidak stabil.

$$x' = -3x + y^2 + 2$$
$$y' = x^2 - y^2$$

...3/-

(Petunjuk : Nilai eigen matriks $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ialah $\lambda = \frac{1}{2}\left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}\right)$ dimana $\tau = a + d$ dan $\Delta = ad - bc$).

[100 markah]

3. (a) Pertimbangkan masalah

$$y'' + \lambda y = 0$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$$

Tunjukkan bahawa nilai eigen masalah ini adalah $\left\{0, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{L}, \cdots\right\}$ dan fungsi eigennya yang sepadan adalah $\left\{1, \cos\frac{\pi x}{L}, \cos\frac{2\pi x}{L}, \cdots\right\}$

(c) Tunjukkan bahawa set fungsi eigen di atas berortogon pada selang $[0, L]$.

(d) Pertimbangkan masalah haba berikut,

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \begin{matrix} 0 < x < L \\ t > 0 \end{matrix}$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$u(0,t) = 0 \quad , \quad u(L,t) = 0$$

dan syarat awal,

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 < x < L/2 \\ 0, & L/2 < x < L \end{cases}.$$

(i) Dengan menulis $u(x,t) = X(x)T(t)$, gunakan kaedah pemisahan pembolehubah dan terbitkan masalah Sturm-Liouville berikut,

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0), \quad X(L) = 0,$$

dan tunjukkan bahawa masalah ini mempunyai fungsi eigen

$$X(x) = C\sin\frac{n\pi x}{L}, n = 1,2,3,\cdots$$

(ii) Seterusnya, tunjukan bahawa masalah haba ini mempunyai penyelesaian khusus dalam bentuk

$$u_n(x,t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}\sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

...4/-

(iii) Penyelesaian am masalah haba di atas ialah

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\left(n^2\pi^2/L^2\right)t}\sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Gunakan syarat awal yang diberikan untuk mencari nilai pekali $A_n, n=1,2,3,\cdots$

(Petunjuk : Siri Fourier untuk suatu fungsi ganjil pada selang $[-p,p]$ ialah

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{p}$$

dimana $b_n=\dfrac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{p}dx$)

[100 markah]

-oooOOooo-