UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2005/2006

Jun 2006

MAT 222 – Persamaan Pembezaan II

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

*[**Arahan:** Jawab **semua tiga** [3] soalan].*

1. (a) Pertimbangkan sistem persamaan tak homogen berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Selesaikan sistem ini menggunakan **kaedah pekali belum tentu.** Andaikan penyelesaian khusus dalam bentuk

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}$$

di mana $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dan $\mathbf{d}$ adalah vektor-vektor yang perlu ditentukan.

[70 markah]

(b) Biar $\mathbf{x} = \phi(t)$ menjadi penyelesaian am kepada

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$$

dan biar $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ menjadi sebarang penyelesaian khusus kepada sistem yang sama. Dengan mempertimbangkan perbezaan $\phi(t) - \mathbf{v}(t)$, tunjukkan bahawa

$$\phi(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$$

di mana $\mathbf{u}(t)$ ialah penyelesaian am kepada sistem homogen $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

[20 markah]

(c) Tunjukkan bahawa $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$ adalah dua penyelesaian tak bersandar linear kepada sistem persamaan

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Sehubungan itu, deduksikan matriks asasi persamaan ini.

[10 markah]

2. (a) Pertimbangkan sistem berotonomi berikut,

$$x' = x - \beta y + \alpha$$
$$y' = \delta x - \gamma$$

Cari kesemua titik kritikal sistem di atas, klasifikasikan jenisnya (samada nod, titik pelana, pusaran atau pusat) dan kestabilan titik-titik tersebut bagi kes-kes berikut,

(i) $\beta\delta < \frac{1}{4}$;

(ii) $\beta\delta > \frac{1}{4}$.

[35 markah]

(b) Bincangkan tabiat penyelesaian sistem $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$ secara bergeometri di mana penyelesaian amnya adalah seperti berikut,

(i) $\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$;

(ii) $\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

(Lakarkan potret fasa sistem ini jika perlu).

[20 markah]

(c) Pertimbangkan sistem berotonomi berikut,

$$x' = 2x - y^2$$
$$y' = -y + xy \, .$$

(i) Cari kesemua titik kritikal sistem ini.

(ii) Dengan mempertimbangkan matriks Jacobi sistem ini serta nilai eigennya, klasifikasikan setiap titik kritikal tersebut dari segi jenis dan kestabilannya.

[45 markah]

3. (a) Pertimbangkan masalah nilai sempadan berikut,

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Tunjukkan bahawa nilai eigen masalah ini ialah $n^2\pi^2$, $n = 0,1,2,\ldots$ dan set fungsi eigen yang sepadan ialah

$$\{1, \cos \pi x, \cos 2\pi x, \cos 3\pi x, \ldots\}.$$

[30 markah]

(b) Tunjukkan bahawa set fungsi eigen di atas berortogon pada selang $[0,1]$.

[20 markah]

(c) Pertimbangkan masalah haba berikut

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$0 < x < 1, \quad t > 0$$

tertakluk kepada syarat sempadan

$$u_x(0,t)=0, \qquad u_x(1,t)=0, \quad t>0$$

dan syarat awal

$$u(x,0)=x, \qquad 0<x<1$$

(i) Dengan menulis $u(x,t)=X(x)T(t)$, gunakan kaedah pemisahan pembolehubah dan terbitkan masalah Sturm-Liouville berikut,

$$X''+\lambda X=0, \qquad X'(0)=0, \quad X'(1)=0.$$

Tunjukkan bahawa masalah ini mempunyai fungsi eigen

$$X(x)=\cos n\pi x, \qquad n=0,1,2,3,\ldots.$$

(ii) Seterusnya tunjukkan bahawa penyelesaian am masalah haba ini boleh ditulis dalam bentuk

$$u(x,t)=\frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2k^2t}\cos n\pi x,$$

di mana c_n, $n=0,1,2,3,\ldots$ adalah pemalar-pemalar sebarangan.

(iii) Gunakan syarat awal yang diberikan untuk mencari nilai pekali c_n, $n=0,1,2,3,\ldots.$.

[50 markah]

- ooo O ooo -