
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2005/2006

Jun 2006

MAT 202 – Pengantar Analisis

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

[Arahan: Jawab semua tiga [3] soalan].

1. (a) Takrifkan Supremum bagi suatu subset S yang tak kosong pada \mathbb{R} .
[5 markah]
- (b) Diberikan set $S = \{x^2 - 2x + 2 : x \in \mathbb{R}\}$.
Dapatkan supremum dan infimum set S ini jika wujud.
[10 markah]
- (c) Takrifkan nombor nisbah.
Katakan x dan y dan nombor nyata dengan $x < y$.
Tunjukkan bahawa wujud suatu nombor nisbah q dengan $x < q < y$.
[15 markah]
- (d) Andaikan S suatu subset tak kosong pada \mathbb{R} dan S dibatasi dari atas.
Takrifkan
$$T = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ batas atas } S\}.$$

Tunjukkan $\sup S = \inf T$.
[10 markah]
- (e) (i) Buktikan bahawa $\sqrt{2}$ adalah nombor yang bukan nisbah.
[15 markah]
- (ii) Tarikfkan keterbilangn sesuatu set. Seterusnya tunjukkan bahawa set semua nombor nisbah adalah terbilangn.
[15 markah]
2. (a) Diberikan $\{a_n\} = \left\{ \frac{(1+4n)^2}{1-3n-6n^2} : n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
- (i) Adakah jujukan ini menumpu?
- (ii) Dengan menggunakan takrifan, tentusahkan penumpuan jujukan ini. Seterusnya, cari nilai terkecil n_0 apabila $\varepsilon = 0.01$.
[20 markah]

(b) Takrifkan jujukan Cauchy. Seterusnya tunjukkan bahawa jujukan $\{(-1)^n\}$ bukan satu jujukan Cauchy.

[15 markah]

(c) Andaikan A sebagai suatu set indeks, dan untuk setiap $a \in A$, set G_a adalah terbuka. Tunjukkan bahawa $\bigcup_{a \in A} G_a$ adalah terbuka.

[10 markah]

(d) (i) Takrifkan tudung terbuka bagi suatu set $A \subset \mathbb{R}$.

[5 markah]

(ii) Takrifkan ketakterkaitkan bagi suatu set $A \subset \mathbb{R}$. Seterusnya diberikan $A = [-10, 2] \cup [4, 10)$. Dengan menggunakan takrifan ini, tentukan sama ada A terkait atau sebaliknya.

[15 markah]

3. (a) Diberi $f(x) = \frac{1}{x}$

(i) Tunjukkan bahawa f adalah selanjar secara seragam pada $[c, d]$ untuk $0 < c < d$.

(ii) Tunjukkan bahawa f adalah tidak selanjar secara seragam pada $(0, \infty)$.

[15 markah]

(b) Diberikan $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satu fungsi yang selanjar. Jelaskan samada set berikut terbuka atau tertutup.

(i) $\{x: f(x) = a\}$ untuk $a \in \mathbb{R}$

(ii) $\{x: |f(x)| \leq K\}$ untuk $K > 0$

[10 markah]

(c) (i) Nyatakan Teorem Nilai Min.

(ii) Andaikan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dan a sebagai titik pedalaman A . Jika f mempunyai ekstrimum setempat pada a dan f terbezakan pada a , tunjukkan bahawa $f'(a) = 0$.

[15 markah]

- (d) Biarkan $f(x) = 1 - x^2$, $x \in [-2, 1]$, $P = \{-2, -1, 0, 1\}$.
- (i) Cari hasil tambah atas f , $A(P : f)$ terhadap petak P .
 - (ii) Cari hasil tambah bawah f , $B(P : f)$ terhadap petak P .
 - (iii) Berdasarkan petak P seperti di atas, berikan satu contoh penghalusan kepada petak P ini.

[15 markah]

- (e) Dengan menggunakan takrif kamiran Riemann, tunjukkan bahawa

$$\int_a^b c dx = c(b - a) \quad , \quad c \in \mathbb{R} .$$

[10 markah]

- 000 O 000 -