
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2006/2007

April 2007

MAT 202 – Introduction To Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer **all four** [4] questions.

Arahan : Jawab **semua empat** [4] soalan.]

...2/-

1. (a) By using the completeness axiom show that a nonempty set of real numbers which is bounded below has an infimum.
- (b) (i) Define supremum and infimum for a nonempty set S , where $S \subset \mathbb{R}$.
[\mathbb{R} = set of real numbers]
- (ii) Find the supremum and infimum for the following sets if they exist
- (a) $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$
- (b) $B = \left\{ \sin x : 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$
- (c) State the completeness axiom for \mathbb{R} . Give an example to show that the set of rational numbers, \mathbb{Q} does not satisfy the completeness axiom. Then using your example, explain how the set does not satisfy the completeness axiom.
- (d) Let B be a set of all circles with centre at a point $(a, 0)$ and radius r where r is a rational number and a a natural number. Determine whether B is a countable set.
- (e) Prove that $\sqrt{6}$ is not rational. Then show that $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ is not rational.
- [100 marks]

2. (a) Use the definition to show that the sequence $\left\{ \frac{2n^2 + 1}{n^2} \right\}$ is or is not Cauchy.
- (b) Given $\{a_n\}$ a convergent sequence with $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ and $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$. Show that $\alpha = \beta$.
- (c) Given an infinite set $A \subset \mathbb{R}$ which is bounded and a sequence $\{a_n\} \subset A$. Then there exists a closed interval $S = [a, b]$ so that $A \subset S$. Dividing the interval S into 2 halves, and choose one of them and calling it I_1 , and repeating this process we then obtain the following.
- (i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$, where I_n is a closed interval for each $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) The length of $I_n = \frac{b-a}{2^n}$
- (iii) Each set $A_n = I_n \cap A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$ is an infinite set. [$A_0 = A$].
- Show that there exists a subsequence $\{a_{n_k}\}$ of $\{a_n\}$ such that $\{a_{n_k}\}$ converges to $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
- [\mathbb{N} = set of natural numbers]

...3/-

1. (a) Dengan menggunakan Aksiom kelengkapan, tunjukkan bahawa set nombor nyata tak kosong dan dibatasi bawah mempunyai infimum.
- (b) (i) Takrifkan supremum dan infimum bagi set tak kosong S , dimana $S \subset \mathbb{R}$.
[\mathbb{R} = set semua nombor nyata].
- (ii) Cari supremum dan infimum bagi set berikut jika wujud.
- (a) $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 2\}$
- (b) $B = \left\{ \sin x : 0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \right\}$
- (c) Nyatakan aksiom kelengkapan bagi \mathbb{R} . Berikan satu contoh untuk menunjukkan bahawa set nombor nisbah \mathbb{Q} tidak memenuhi aksiom kelengkapan. Gunakan contoh ini untuk menjelaskan set \mathbb{Q} tidak memenuhi aksiom kelengkapan.
- (d) Andaikan B adalah set semua bulatan berpusat pada titik $(a, 0)$ dan radius r dimana r ialah nombor nisbah dan a ialah nombor asli. Tentukan samada B adalah set terbilangkan.
- (e) Buktikan bahawa $\sqrt{6}$ adalah nombor nisbah. Kemudian tunjukkan juga bahawa $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ bukan nisbah.

[100 markah]

2. (a) Gunakan takrifan untuk menunjukkan bahawa jujukan $\left\{ \frac{2n^2 + 1}{n^2} \right\}$ adalah Cauchy atau tidak.
- (b) Diberi $\{a_n\}$ adalah jujukan menumpu dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$. Tunjukkan bahawa $\alpha = \beta$.
- (c) Diberi set $A \subset \mathbb{R}$ tak terhingga yang terbatas dan jujukan $\{a_n\} \subset A$. Maka wujudnya suatu selang tertutup $S = [a, b]$ dengan $A \subset S$. Bahagi dua sama S kepada dua subselang, pilih satu daripada mereka dan lambangkan sebagai I_1 . Proses ini diulangi untuk memperoleh
- (i) $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$, I_n selang tertutup untuk $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) panjang selang $I_n = \frac{b-a}{2^n}$
- (iii) setiap set $A_n = I_n \cap A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, adalah tak terhingga. [$A_0 = A$].
- Tunjukkan bahawa wujud suatu subjujukan $\{a_{n_k}\}$ kepada $\{a_n\}$ supaya $\{a_{n_k}\}$ menumpu ke $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. [\mathbb{N} = set nombor asli]

...4/-

(d) Given $\{a_n\}$ a Cauchy sequence, show

- (i) $\{a_n\}$ is bounded
 (ii) $\{a_n\}$ is convergent

[100 marks]

3. (a) Given $\tau = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$, an open covering of a set $A \subset \mathbb{R}$, where A is a compact set. Show that A is bounded.

(b) Define compactness in terms of open covering. Using this definition, Show that the set $(0, 1)$ is not compact.

(c) Given a set $A = (2, 5] - Q$. Find the interior points, accumulation / limit points, and the isolated points.

(d) Given a set $A = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$. Show that A does not have any accumulation points (limit points). Further more, determine whether A is open or closed.

[100 marks]

4. (a) Let $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ and $a \in A$. Show that if a is an isolated point of A , then f is continuous at a . Let $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup [2, 3]$ and $f(x) = x$. Is f continuous on A ? Justify your answer.

(b) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuous function. Given an open set U in \mathbb{R} , show that the preimage set $f^{-1}(U)$ is an open set. Given a set $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < 1\}$, show that A is open.

(c) Given a function $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Using the definition, show that this function is uniformly continuous on $[0, \infty)$.

(d) Given a sequence of functions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ defined on \mathbb{R} by $f_n(x) = x^n$. Determine for what values of x on the given set, the sequence of functions converges point wise. Next find the pointwise limit of the sequence $\{f_n\}$.

(e) Show that the sequence of functions $\{f_n\}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converges pointwise on \mathbb{R} and converges uniformly on $[-M, M]$ for any $M > 0$.

[100 marks]

...5/-

(d) Diberi $\{a_n\}$ adalah jujukan Cauchy, tunjukkan bahawa

(i) $\{a_n\}$ terbatas

(ii) $\{a_n\}$ menumpu

[100 markah]

3. (a) Diberi $\tau = \{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$, suatu tudung terbuka bagi set $A \subset \mathbb{R}$, dimana A adalah set padat. Tunjukkan A adalah terbatas.

(b) Takrifkan kepadatan set dalam sebutan tudung terbuka. Menggunakan takrifan ini, tunjukkan bahawa set $(0, 1)$ adalah tak padat.

(c) Diberi set $A = (2, 5] - \mathbb{Q}$. Tentukan titik pedalaman, titik had dan titik terpencil.

(d) Diberi set $A = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$. Tunjukkan bahawa A tidak mempunyai titik had. Seterusnya, tentukan samada A terbuka atau tertutup.

[100 markah]

4. (a) Andaikan $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ dan $a \in A$. Tunjukkan bahawa jika a adalah titik terpencil set A , maka f selanjur pada a . Andaikan $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [2, 3]$ dan $f(x) = x$.

Adakah f selanjur pada A ? Terangkan jawapan anda.

(b) Biar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ adalah fungsi selanjur. Diberi set terbuka U dalam \mathbb{R} , tunjukkan bahawa set pra-imej $f^{-1}(U)$ juga terbuka. Diberi set $A = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < 1\}$, tunjukkan A adalah terbuka.

(c) Diberi fungsi $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$. Menggunakan takrifan, tunjukkan bahawa fungsi ini selanjur secara seragam pada $[0, \infty)$.

(d) Diberi suatu jujukan fungsi $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ditakrifkan pada \mathbb{R} oleh $f_n(x) = x^n$. Tentukan nilai-nilai x pada set yang diberikan, dimana jujukan fungsi menumpu secara titik demi titik. Kemudian cari had titik demi titik jujukan $\{f_n\}$.

(e) Tunjukkan bahawa jujukan fungsi $\{f_n\}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$, menumpu secara titik demi titik pada \mathbb{R} dan menumpu secara seragam pada $[-M, M]$ untuk sebarang $M > 0$.

[100 markah]

ooo000ooo-