UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2005/2006

Jun 2006

MAT 111E – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua enam** [6] soalan].*

1. (a) Find the vector equation of the straight line that passes through the point $(1,2,3)$ and parallel to $\vec{u}=(3,3,6)$. Determine whether the point $(1,-2,1)$ lies on that line.

[65 marks]

(b) Find the vector equation of the plane containing the points $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. Is the point $(1,0,1)$ lies on this plane?

[45 marks]

1 (a) Cari persamaan vektor bagi garis lurus yang melalui titik $(1,2,3)$ *dan selari dengan* $\vec{u}=(3,3,6)$. *Tentusahan sama ada titik* $(1,-2,1)$ *berada di atas garis tersebut.*

[65 markah]

(b) Cari persamaan vector bagi satah yang terletaknya titik-titik $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. *Adakah titik* $(1,0,1)$ *berada di atas satah tersebut?*

[45 markah]

2. Let $V=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid b+c+d=0\}$.

(a) Show that the set V is a vector space

[60 marks]

(b) Find a subset S of V *such that* $V=L(S)$ that is S is a generating set of V.

[30 marks]

(c) Find a basis of V.

[30 marks]

(d) What is the dimension of V?

[10 marks]

2. Biar $V=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid b+c+d=0\}$.

(a) Tunjukkan V ialah suatu ruang vekor

[60 markah]

(b) Cari suatu subset S daripada V sedemikian hingga $V=L(S)$ *iaitu S ialah suatu set rentangan bagi V.*

[30 markah]

(c) *Cari suatu asas bagi V*

[30 markah]

(d) *Apakah dimensi bagi V?*

[10 markah]

3. Define $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be a function such that $(x_1, x_2, x_3)T = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$.

(i) Show that T is a linear transformation

[45 marks]

(ii) Find the matrix A such that
$(v)T = vA \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$

[25 marks]

(iii) Find the inverse of A by using T^{-1}.

[40 marks]

3. *Takrifkan* $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *suatu fungsi sedemikian hingga* $(x_1, x_2, x_3)T = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$.

(i) *Tunjukkan T ialah suatu transformasi linear*

[45 markah]

(ii) *Cari matrik A sedemikian hingga*
$(v)T = vA \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$

[25 markah]

(iii) *Cari songsang bagi A dengan menggunakan* T^{-1}.

[40 markah]

4. Let $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a linear transformation.

(a) Show that T is one-to-one and onto if and only if $\ker(T) = \{\underline{0}\}$ where $\underline{0}$ is the zero vector of $\mathbb{R}^n$.

[40 marks]

(b) Show that $\ker(T)$ and $\mathrm{Im}(T)$ are subspaces of $\mathbb{R}^n$.

[60 marks]

4. Biar $T:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ suatu transformasi linear.

(a) Tunjukkan T adalah satu ke satu dan keseluruhan jika dan hanya jika $\ker(T)=\{\underline{0}\}$ di mana $\underline{0}$ ialah vektor sifar bagi $\mathbb{R}^n$.

[40 markah]

(b) Tunjukkan $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$ adalah subruang bagi $\mathbb{R}^n$.

[60 markah]

5. (a) Let $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Find the eigenvalues of A and the corresponding eigenvectors.

[30 marks]

(ii) Find matrix P and D where D is a diagonal matrix such that $P^{-1}AP=D$.

[40 marks]

(iii) Use the result in (ii), find A^{10}

[30 marks]

5. (a) Let $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(i) Cari nilai-nilai eigen bagi A dan vektor-vektor eigennya yang sepadan.

[30 markah]

(ii) Cari matrix P dan D di mana D ialah suatu matrik pepenjuru sedemikian hingga $P^{-1}AP=D$.

[40 markah]

(iii) Guna keputusan di (ii), untuk cari A^{10}

[30 markah]

6.
$$\begin{aligned} x+y+z+w&=1 \\ x+2z\quad -w&=2 \\ x-y\quad +2w&=-1 \end{aligned} \qquad (*)$$

(i) Use Gaussian Elimination to find the solution of (*).

[70 marks]

(ii) Deduce that the solution can be written in the form

$$x = x_p + x_w$$

Where x_p is a solution to (*) and x_w is the solution of the corresponding homogeneous system.

[50 marks]

(iii) The system (*) can be written as the linear transformation $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ defined by $(v)T = v \cdot A$. Use your result in (ii) to find $\ker(T)$ and hence, find $\dim(\ker(T))$.

[30 marks]

6.

$$\begin{aligned} x+y+z+w &= 1 \\ x+2z \quad -w &= 2 \\ x-y \quad +2w &= -1 \end{aligned} \qquad (*)$$

(i) Gunakan kaedah penghapusanGauss untuk mencari penyelesaian kepada sistem persamaan Linear (*).

[70 markah]

(ii) Deduksikan bahawa penyelesaian tersebut boleh ditulis dalam bentuk

$$x = x_p + x_w$$

di mana x_p ialah suatu penyelesaian kepada (*) dan x_w ialah penyelesaian kepada system homogen yang sepadan.

[50 markah]

(iii) Sistem (*) boleh ditulis sebagai suatu transformasi linear $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ yang ditakrifkan sebagai $(v)T = v \cdot A$. Gunakan keputusan daripada bahagian (ii) untuk mencari $\ker(T)$ dan seterusnya cari dim $(\ker(T))$.

[30 markah]

- ooo O ooo -