
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2005/2006

April/May 2006

MAT 111E – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini].

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan].

1. (a) Find the vector equation of the line that passes through the points $(0,1,-1)$ and $(2,-5,3)$. Show that the point $(1,-2,1)$ lies on that line.

[65 marks]

- (b) Find the vector equation of the plane containing the points $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$. Does the point $(1,1,1)$ lie on this plane?

[45 marks]

- 1 (a) Cari persamaan vektor bagi garis yang melalui titik-titik $(0,1,-1)$ dan $(2,-5,3)$.
Tunjukkan bahawa titik $(1,-2,1)$ berada di atas garis tersebut.

[65 markah]

- (b) Cari persamaan vector bagi satah yang terletakinya titik $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$. Adakah titik $(1,1,1)$ berada di atas satah ini?

[45 markah]

2. (a) Let $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (1,1,0)$, $V_3 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Show that the set

$$B = \{2V_1 + V_2 + V_3, V_1 + 2V_2 - V_3, V_1 - V_2 + 2V_3\} \text{ is linearly dependent.}$$

[25 marks]

- (ii) Find a maximal linearly independent subset A of B .

[20 marks]

- (iii) Find a basis S for $\mathbb{R}^3$ such that $A \subseteq S$

[25 marks]

- (b) Let $V = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0\}$. Show that V is a subspace of $P_2(\mathbb{R})$.

[60 marks]

2. (a) Biar $V_1 = (1,1,1)$, $V_2 = (1,1,0)$, $V_3 = (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$.

- (i) Tunjukkan

$$B = \{2V_1 + V_2 + V_3, V_1 + 2V_2 - V_3, V_1 - V_2 + 2V_3\} \text{ adalah suatu set yang bersandar linear.}$$

[25 markah]

- (ii) Cari suatu subset tak bersandar linear maximal A daripada B .

[20 markah]

.../3-

(iii) Cari suatu asas S bagi R^3 sedemikian hingga $A \subseteq S$.

[25 markah]

(b) Biar $V = \{p(x) \in P_2(R) \mid p(0) = 0\}$. Tunjukkan V ialah suatu subruang bagi $P_2(R)$.

[60 markah]

3. Define $T : R^3 \rightarrow R^3$ be function such that $(x_1, x_2, x_3)T = (3x_2, -x_3, x_1 + x_2)$.

(i) Show that T is a linear transformation

[45 marks]

(ii) Find the matrix A such that
 $(v)T = vA \quad \forall v \in R^3$

[25 marks]

(iii) Find the inverse of A by using T^{-1} .

[40 marks]

3. Takrifkan $T : R^3 \rightarrow R^3$ suatu fungsi sedemikian hingga
 $(x_1, x_2, x_3)T = (3x_2, -x_3, x_1 + x_2)$.

(i) Tunjukkan T ialah suatu transformasi linear

[45 markah]

(ii) Cari suatu matrik A sedemikian hingga
 $(v)T = vA \quad \forall v \in R^3$

[25 markah]

(iii) Cari songsang bagi A dengan menggunakan T^{-1} .

[40 markah]

4. (a) Let $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ be a linear transformation such that T is one-to-one. If $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forms a basis of $\mathbb{R}^n$, show that $\{v_1T, v_2T, \dots, v_nT\}$ forms a basis for $\text{Im}(T)$.

[60 marks]

(b) Let $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a linear transformation defined by $(x)T = x \cdot A$ for x in $\mathbb{R}^n$. Show that T is one-to-one and onto if and only if A is nonsingular

[40 marks]

.../4-

4. (a) Biar $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mewakili satu transformasi linear dan T satu-ke-satu. Jika $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ membentuk asas kepada $\mathbb{R}^n$, tunjukkan bahawa $\{v_1T, v_2T, \dots, v_nT\}$ membentuk asas kepada $\text{Im}(T)$.

[60 markah]

- (b) Biar $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mewakili satu transformasi linear ditakrifkan sebagai $(x)T = x \cdot A$ untuk x dalam $\mathbb{R}^n$. Tunjukkan bahawa T satu-ke-satu dan keseluruhan jika dan hanya jika A tak singular.

[40 markah]

5. (a) Let $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- (i) Find the eigenvalues of A and the corresponding eigenvectors.

[30 marks]

- (ii) Verify that A is diagonalizable.

[20 marks]

- (b) Show that if A is diagonalizable, then

- (i) A^T is diagonalizable

[25 marks]

- (ii) A^k is diagonalizable where k is a positive integer.

[25 marks]

5. (a) Biar $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- (i) Cari nilai eigen A dan vektor eigennya yang sepadan.

[30 markah]

- (ii) Tentusahkan bahawa A terpepenjurukan.

[20 markah]

- (b) Tunjukkan bahawa, jika A terpepenjurukan, maka

- (i) A^T terpepenjurukan

[25 markah]

- (ii) A^k terpepenjurukan, di mana k ialah integer positif.

[25 markah]

6. Consider the system of linear equation

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 8 \\ x + 3y \quad \quad + w &= 7 \\ x \quad + 2z \quad + w &= 3 \end{aligned} \quad (1)$$

- (i) Use Gaussian Elimination to find the solution to (1).

[70 marks]

- (ii) Deduce that the solution can be written in the form

$$x = x_p + x_w$$

Where x_p is a solution to (1) and x_w is the solution of the corresponding homogeneous system.

[50 marks]

- (iii) The system (1) can be written as the linear transformation $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ defined by $(v)T = v \cdot A$. Use your result in (ii) to find $\ker(T)$ and hence, deduce its dimension.

[30 marks]

6. Pertimbangkan sistem persamaan linear berikut,

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= 8 \\ x + 3y \quad \quad + w &= 7 \\ x \quad + 2z \quad + w &= 3 \end{aligned} \quad (1)$$

- (i) Gunakan kaedah penghapusan Gauss untuk mencari penyelesaian kepada (1).

[70 markah]

- (ii) Deduksikan bahawa penyelesaian tersebut boleh ditulis dalam bentuk

$$x = x_p + x_w$$

di mana x_p ialah penyelesaian kepada (1) dan x_w ialah penyelesaian kepada sistem homogen yang sepadan.

[50 markah]

- (iii) Sistem (1) boleh ditulis sebagai transformasi linear $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ yang ditakrifkan sebagai $(v)T = v \cdot A$. Gunakan keputusan daripada bahagian (ii) untuk mencari $\ker(T)$ dan seterusnya, deduksikan dimensinya

[30 markah]