
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2006/2007

April 2007

MAT 111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of ELEVEN pages of printed material before you begin the examination.

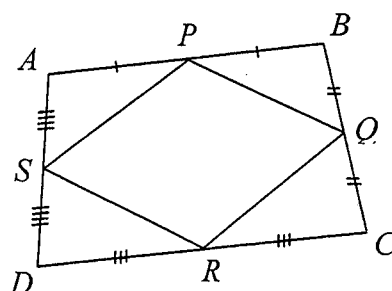
[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEBELAS muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]

...2/-

1. (a) Refer to the following diagram.



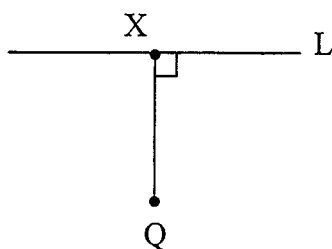
For the quadrilateral $ABCD$, let P , Q , R and S be the midpoints respectively of AB , BC , CD and DA . Show, using vectors, that $PQRS$ is a parallelogram.

[Hint: Show that $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$]

- (b) (i) Let $u = (5, 4, 1)$, $v = (3, -4, 1)$ and $w = (1, -2, 3)$.
Which pair of vectors, if any, are perpendicular (orthogonal)?
- (ii) Show that for any vector $u \in \mathbb{R}^n$,
 $u \cdot u \geq 0$.
Show also that $u \cdot u = 0$ iff $u = \underline{0}$.
- (c) (i) Find the parametric form of the equation of the line parallel to the y -axis and passing through $(6, -5, 1)$.
- (ii) Find the equation of the plane passing through $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ and $(0, 0, 4)$.
- (d) Given a line $L = \overrightarrow{P} + t\overrightarrow{u}$ and a point Q not in L . Show that the shortest distance from Q to L is

$$\frac{|\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{QP})|}{|\overrightarrow{u}|}$$

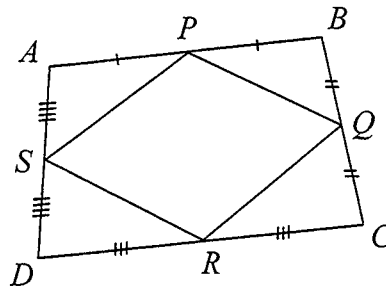
[Hint: Refer to the following diagram. The shortest distance from Q to L is the length of the vector $\overrightarrow{QX}$]



[100 marks]

.../3-

1. (a) Rujuk gambarajah berikut.



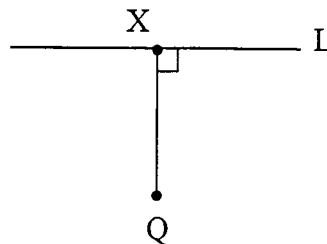
Bagi segi empat ABCD tersebut, biar P , Q , R dan S sebagai titik tengah masing-masing bagi AB , BC , CD dan DA . Tunjukkan menggunakan vektor, bahawa $PQRS$ adalah suatu segiempat selari.

[Petunjuk: Tunjukkan bahawa $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$].

- (b) (i) Biar $u = (5, 4, 1)$, $v = (3, -4, 1)$ dan $w = (1, -2, 3)$.
Pasangan vektor yang manakah, jika ada, adalah serenjang (ortogon)?
- (ii) Tunjukkan bahawa bagi sebarang vektor $u \in \mathbb{R}^n$,
 $u \cdot u \geq 0$.
Tunjukkan juga bahawa $u \cdot u = 0$ jh $u = \underline{0}$.
- (c) (i) Cari persamaan dalam bentuk berparameter bagi garislurus yang selari dengan paksi- y dan melalui $(6, -5, 1)$.
- (ii) Cari persamaan bagi satah yang melalui $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ dan $(0, 0, 4)$.
- (d) Di beri suatu garis lurus $L = \bar{P} + t\bar{u}$ dan suatu titik Q yang tidak berada pada L . Tunjukkan bahawa jarak yang terdekat dari Q ke L adalah

$$\frac{|\bar{u} \times (\overrightarrow{QP})|}{|\bar{u}|}$$

[Petunjuk: Rujuk kepada gambarajah berikut. Jarak terdekat dari Q ke L adalah panjang vektor $\overrightarrow{QX}$]



[100 markah]

.../4-

2. Given the following system of linear equations.

$$\begin{array}{rrrrrcl} x & - & y & + & 2z & - & w & = & -1 \\ 2x & + & y & - & 2z & - & 2w & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & 4z & + & w & = & 1 \\ 3x & & & & & & - & 3w & = & -3 \end{array}$$

- (a) Convert the system into an augmented matrix $[A|b]$. Then do the Gauss-Jordan process to obtain the row reduced echelon form (rref) of the augmented matrix.
- (b) Write out the equation obtained from the rref. Determine the leading and free variables and then solve the system to get the solution in the form

$$(x, y, z, w) = (a, b, c, d) + \alpha(a', b', c', d') + \beta(a'', b'', c'', d'')$$
- (c) Check your solution by showing that (a, b, c, d) is a particular solution to the system and $\alpha(a', b', c', d') + \beta(a'', b'', c'', d'') \in \text{Ker } A$.

- (d) If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, then from your calculation in (b), or otherwise, determine the column rank of A .

[100 marks]

.../5-

2. Diberi sistem persamaan linear berikut.

$$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x &\quad - 3w = -3 \end{aligned}$$

- (a) Tukarkan sistem tersebut ke dalam bentuk matriks imbuhan $[A|b]$. Kemudian, lakukan proses Gauss-Jordan untuk mendapatkan bentuk eselon baris terturun (bebt) bagi matriks imbuhan tersebut.
- (b) Tuliskan persamaan yang diperolehi dari bebt tersebut. Tentukan pembolehubah-pembolehubah utama dan bebas dan kemudian selesaikan sistem tersebut untuk mendapatkan penyelesaian dalam bentuk $(x, y, z, w) = (a, b, c, d) + \alpha(a', b', c', d') + \beta(a'', b'', c'', d'')$.
- (c) Semak jawapan anda dengan menunjukkan bahawa (a, b, c, d) adalah penyelesaian khusus terhadap sistem ini dan $\alpha(a', b', c', d') + \beta(a'', b'', c'', d'') \in \text{Ker } A$.

- (d) Jika $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, maka dari pengiraan anda dalam (b), atau cara lain, tentukan pangkat lajur A .

[100 markah]

3. (a) Show that
- (i) the function $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$(x, y, z, t)T = 3x + 4y - 2z - 3t$$
 is a linear transformation.
 - (ii) the function $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ defined by

$$(x, y, z)T = (x, -y, y+1, x+y)$$
 is not a linear transformation.
- (b) Given that $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is a linear transformation such that $(1, 0, 1)T = (1, 2)$, $(1, 1, 0)T = (3, 4)$ and $(0, 0, 1)T = (2, 3)$.
- (i) Show that if $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ and $v_3 = (0, 0, 1)$ then if $v = (x, y, z)$ is any vector in $\mathbb{R}^3$, we can find α_1, α_2 and α_3 in terms of x, y, z such that

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$
 Deduce that $\{v_1, v_2, v_3\}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$
 - (ii) From your result in (i), find the definition of T .
 - (iii) From your result in (ii), find the matrix A such that $vT = vA$.
- (c) Determine, using linear transformations, the inverse of B if

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

- (d) Let $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a linear transformation defined by

$$(x, y, z, w)T = (x + y, y + z, 0)$$

Find $\text{Ker } T$ and $\text{Im } T$ and verify that

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T.$$

[100 marks]

3. (a) Tunjukkan bahawa
- (i) fungsi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ditakrifkan dengan
 $(x, y, z, t)T = 3x + 4y - 2z - 3t$
 adalah suatu transformasi linear
- (ii) fungsi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ditakrifkan dengan
 $(x, y, z)T = (x, -y, y+1, x+y)$
 adalah **bukan** suatu transformasi linear.
- (b) Diberi $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ adalah suatu transformasi linear dengan
 $(1, 0, 1)T = (1, 2), (1, 1, 0)T = (3, 4)$ dan $(0, 0, 1)T = (2, 3)$.
- (i) Tunjukkan bahawa jika $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0)$ dan $v_3 = (0, 0, 1)$
 maka jika $v = (x, y, z)$ adalah sebarang vektor dalam $\mathbb{R}^3$, kita
 boleh mencari α_1, α_2 dan α_3 dalam sebutan x, y, z supaya

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}.$$
 Buat kesimpulan bahawa $\{v_1, v_2, v_3\}$ adalah asas bagi $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Dari keputusan anda dalam (i), cari takrif bagi T .
- (iii) Dari keputusan anda dalam (ii), cari matriks A supaya $vT = vA$.
- (c) Tentukan, menggunakan transformasi linear, songsang bagi B jika
- $$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$
- (d) Biar $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suatu transformasi linear ditakrifkan dengan
- $$(x, y, z, w)T = (x + y, y + z, 0)$$

Cari $\text{Ker } T$ dan $\text{Im } T$ dan tentusahkan bahawa

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T.$$

[100 markah]

.../8-

4. (a) Let $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - d = 0\}$ with the following definition of addition and scalar multiplication:

$$(a, b, c, d) \oplus (p, q, r, s) = (a + p, b + q, c + r, d + s)$$

$$k \odot (a, b, c, d) = (ka, kb, kc, kd), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Show that S is a vector space.

[Hint: You can choose to show this by showing all the 10 axioms V1-V10 or by using the subspace conditions].

- (b) Let $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = c\}$ and $B = \{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$
- (i) Show that B is a subset of V (i.e. $B \subseteq V$).
 - (ii) Define the linear span of B , $\mathcal{L}(B)$ and deduce that $\mathcal{L}(B)$ is a subspace of V .
 - (iii) Show that V is a subspace of $\mathcal{L}(B)$ and deduce that B is a basis of V .
- (c) Given $W = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i, \quad a_i \in \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \right\}$ is a subspace of $P_n(\mathbb{R})$. Find the basis and dimension of W .
- (d) Prove that every basis of a finite-dimensional vector space V has the same number of elements.

[100 marks]

4. (a) Biar $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + b - d = 0\}$ dengan penambahan dan pendaraban skalar tertakrif seperti berikut:

$$(a, b, c, d) \oplus (p, q, r, s) = (a + p, b + q, c + r, d + s)$$

$$k \odot (a, b, c, d) = (ka, kb, kc, kd), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Tunjukkan bahawa S adalah suatu ruang vektor.

[Petunjuk: Anda boleh pilih untuk menunjukkannya dengan menggunakan semua aksiom V1-V10 ataupun dengan menggunakan syarat-syarat subruang].

- (b) Biar $V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b = c\}$ dan $B = \{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$
- (i) Tunjukkan bahawa B adalah subset V (i.e. $B \subseteq V$).
 - (ii) Takrifkan rentangan B , $\mathcal{L}(B)$ dan buat kesimpulan bahawa $\mathcal{L}(B)$ adalah subruang V .
 - (iii) Tunjukkan bahawa V adalah subruang $\mathcal{L}(B)$ dan buat kesimpulan bahawa B adalah asas bagi V .
- (c) Biar $W = \left\{ f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i, \quad a_i \in \mathbb{R} \mid f(1) = 0 \right\}$ adalah subruang $P_n(\mathbb{R})$.
Cari asas dan dimensi bagi W .
- (d) Buktikan bahawa semua asas bagi suatu ruang vektor berdimensi terhingga V mempunyai bilangan unsur yang sama.

[100 markah]

5. (a) Given that $S = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ is a basis of $\mathbb{R}^3$. Construct an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ from S using the Gram-Schmidt orthogonalization process.

- (b) For a vector space V , we define its orthogonal complement as

$$V^\perp = \{w \mid w \cdot v = 0, \forall v \in V\}$$

which is also a vector space.

Show that

(i) $(V^\perp)^\perp = V$ (which means $(V^\perp)^\perp \subseteq V$ and $V \subseteq (V^\perp)^\perp$)

(ii) If $U \subseteq V$ then $V^\perp \subseteq U^\perp$

[Hint: To show (ii), for example, let $x \in V^\perp$ and show that $x \in U^\perp$]

- (c) Given the table below

x	0	1	2
y	0	2	7

Clearly the points (x, y) do not lie on a straight line. Find the “best fit straight line” that fits the data.

- (d) Let λ be an eigenvalue of a linear transformation $T: V \rightarrow V$. Prove that the eigenvector of T corresponding to λ are the non-zero vector in the kernel of $\lambda I - T$.

[100 marks]

5. (a) Diberi $S = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ adalah suatu asas bagi $\mathbb{R}^3$. Bina suatu asas ortonormal bagi $\mathbb{R}^3$ daripada S menggunakan proses pengortogonan Gram-Schmidt.

- (b) Bagi suatu ruang vektor V , kita takrifkan pelengkap ortogonnya sebagai $V^\perp = \{w \mid w \cdot v = 0, \forall v \in V\}$

Tunjukkan bahawa

(i) $(V^\perp)^\perp = V$ (yang bermakna $(V^\perp)^\perp \subseteq V$ dan $V \subseteq (V^\perp)^\perp$)

- (ii) Jika $U \subseteq V$ maka $V^\perp \subseteq U^\perp$.

[Petunjuk: Untuk menunjukkan (ii), misalnya, biar $x \in V^\perp$ dan tunjukkan bahawa $x \in U^\perp$]

- (c) Diberi jadual berikut

x	0	1	2
y	0	2	7

Jelas bahawa titik-titik (x,y) tidak berada pada satu garislurus. Cari "garislurus penyesuaian terbaik" yang memuatkan data tersebut.

- (d) Biar λ suatu nilai eigen bagi suatu transformasi linear $T: V \rightarrow V$. Buktikan bahawa vektor-vektor eigen bagi T yang bersepadan dengan λ adalah vektor-vektor bukan sifar di dalam kernel bagi $\lambda I - T$.

[100 markah]

- 000 O 000 -