
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
Academic Session 2005/2006

April/May 2006

MAA 111E – Algebra For Science Students
[Aljabar Untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of TEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions : Answer all **twenty-four** [24] questions.

[Arahan : ***Jawab semua dua puluh empat [24] soalan.]***

.../2-

1. Define: consistent and inconsistent linear systems; homogenous and non-homogeneous linear systems.

[2 marks]

1. *Takrifkan: sistem linear yang konsisten dan tak konsisten; sistem linear yang homogen dan tak homogen.*

[2 markah]

2. Test whether

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

is in row-echelon form. Is it in reduced row echelon form?

[2 marks]

2. *Tentukan sama ada*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

berbentuk eselon baris. Adakah ia dalam bentuk eselon baris terturun?

[2 markah]

3. Solve the linear system in the variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 whose augmented matrix is given by

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 marks]

.../3-

3. Selesaikan sistem linear dalam pembolehubah x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 yang mempunyai matrix imbuhan

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[2 markah]

4. Show that the inverse of a square matrix, if it exists, is unique.

[2 marks]

4. Tunjukkan bahawa songsangan bagi sesuatu matriks segiempat sama, jika wujud, adalah unik.

[2 markah]

5. Prove or disprove: Every linear system $Ax=b$ has no solution or has exactly one solution or infinitely many solutions.

[2 marks]

5. Buktikan atau sangkalkan: Setiap sistem linear $Ax=b$ mempunyai tiada penyelesaian atau mempunyai tepat satu penyelesaian atau mempunyai bilangan penyelesaian yang tak terhingga.

[2 markah]

6. Let $A = [a_{ij}]$ be a square matrix and the minor of a_{34} be 43. What is the cofactor of a_{34} ?

[2 marks]

6. Biar $A = [a_{ij}]$ merupakan suatu matriks segiempat sama dan minor bagi a_{34} ialah 43. Apakah kofaktor bagi a_{34} ?

[2 markah]

7. Let A be a nonsingular matrix. Compute the determinant of $\text{Adj}(\text{Adj } A)$ in terms of the determinant of A .

[2 marks]

7. Katakan A suatu matriks tak singular. Cari nilai penentu $\text{Adj}(\text{Adj } A)$ dalam sebutan penentu bagi A .

[2 markah]

...4/-

8. Using Cramer's rule, solve for y :

$$2x+3y-4z=-3, 7x-8y+9z=10, -2x+z=1. \quad [2 \text{ marks}]$$

8. *Gunakan petua Cramer untuk mencari nilai y :*

$$2x+3y-4z=-3, 7x-8y+9z=10, -2x+z=1. \quad [2 \text{ markah}]$$

9. Using properties of determinants, evaluate

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

[2 marks]

9. *Menggunakan sifat-sifat penentu, nilaikan*

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

[2 markah]

10. Find a nonzero square matrix B such that $AB=0$ where

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2 marks]

10. *Cari suatu matriks segiempat sama tak sifar B supaya $AB=0$ di mana*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

[2 markah]

.../5-

11. Define Euclidean inner product of two vectors in \mathbb{R}^n . Also define the norm of a vector in \mathbb{R}^n .
[2 marks]
11. *Takrifkan hasil darab terkedalam Euclidan bagi dua vektor dalam \mathbb{R}^n . Juga takrifkan norma bagi suatu vektor dalam \mathbb{R}^n .*
[2 markah]
12. If $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ and λ a scalar, then show that $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$.
[2 marks]
12. *Jika $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ dan λ suatu skalar, tunjukkan bahawa $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|$.*
[2 markah]
13. Show that the vectors $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ form a basis for \mathbb{R}^3 .
[2 marks]
13. *Tunjukkan bahawa vektor-vektor $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ membentuk suatu asas bagi \mathbb{R}^3 .*
[2 markah]
14. Find the coordinate vector of (v_1, v_2, v_3) with respect to the basis $\{(1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.
[2 marks]
14. *Cari vektor koordinat bagi (v_1, v_2, v_3) terhadap asas $\{(1,0,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.*
[2 markah]
15. Is the set $\{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ linearly independent?
[2 marks]
15. *Adakah set $\{(1,0,0), (0,1,1), (1,1,1)\}$ tak bersandar secara linear?*
[2 markah]

16. Show that a matrix is singular if and only if one of its eigenvalues is zero.
[2 marks]
16. *Tunjukkan bahawa sesuatu matriks itu singular jika dan hanya jika salah satu nilai eigennya bernilai sifar.*
[2 markah]
17. If $A = MDM^{-1}$ where D is a diagonal matrix and $n \in \mathbb{Z}^+$, compute A^n .
[2 marks]
17. *Jika $A = MDM^{-1}$ di mana D suatu matriks pepenjuru dan $n \in \mathbb{Z}^+$, cari nilai A^n .*
[2 markah]
18. If the eigenvalues of a square matrix A of order 3 are 1, 2, -3, what is the value of the determinant of A ?
[2 marks]
18. *Jika nilai-nilai eigen bagi suatu matriks segiempat sama berperingkat 3, A adalah 1, 2, -3, apakah nilai penentu bagi A ?*
[2 markah]
19. Find a matrix A whose eigenvalues are 1,1,-1 and the corresponding eigenvectors are (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1).
[2 marks]
19. *Cari suatu matriks A dengan nilai-nilai eigen 1,1,-1 dan vektor-vektor eigen yang sepadan (1,0,0), (0,1,1), (1,1,1).*
[2 markah]
20. Define rank and nullity of a matrix.
[2 marks]
20. *Takrifkan pangkat dan kenolan suatu matriks.*
[2 markah]

.../7-

21. (a) Obtain the reduced row echelon form of the matrix:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5 marks]

- (b) If A and B are two square matrices of the same order, then show that $(AB)^T = B^T A^T$.

[5 marks]

- (c) Prove that any square matrix A is a sum of a symmetric matrix and a skew-symmetric matrix.

[5 marks]

21. (a) Dapatkan bentuk eselon baris terturun bagi matriks:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

[5 markah]

- (b) Jika A dan B adalah matriks-matriks segiempat sama berpangkat sama, tunjukkan bahawa $(AB)^T = B^T A^T$.

[5 markah]

- (c) Buktikan bahawa sebarang matriks segiempat sama merupakan hasil tambah suatu matriks simetri dan suatu matriks simetri-pencong.

[5 markah]

22. (a) If A is any square matrix, then show that $A(\text{Adj}A)=\det(A)I$. [5 marks]

(b) If A and B are two square matrices of the same order, then show that $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. [5 marks]

(c) Evaluate the determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[5 marks]

22. (a) Jika A sebarang matriks segiempat sama, tunjukkan bahawa $A(\text{Adj}A)=\det(A)I$. [5 markah]

(b) Jika A dan B sebarang dua matriks segiempat sama berperingkat sama, tunjukkan bahawa $\det(AB)=\det(A)\det(B)$. [5 markah]

(c) Nilaikan penentu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[5 markah]

23. (a) Show that a line through the origin of \mathbb{R}^3 is a subspace of \mathbb{R}^3 . [5 marks]
- (b) Show that a linear system $Ax=0$ has only a trivial solution if and only if the column vectors of A are linearly independent. [5 marks]
- (c) Find λ and μ so that the system $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ has
 (i) no solution,
 (ii) a unique solution, or
 (iii) an infinite number of solutions. [5 marks]

23. (a) *Tunjukkan bahawa garislurus yang melalui asalan bagi \mathbb{R}^3 merupakan suatu subruang bagi \mathbb{R}^3 .* [5 markah]
- (b) *Tunjukkan bahawa sistem linear $Ax=0$ mempunyai hanya penyelesaian remeh jika dan hanya jika vektor-vektor lajur bagi A tak bersandar secara linear.* [5 markah]
- (c) *Cari λ dan μ supaya sistem $x+y+z=6$, $x+2y+3z=10$, $x+2y+\lambda z=\mu$ mempunyai*
 (i) *tiada penyelesaian,*
 (ii) *penyelesaian unik, atau*
 (iii) *bilangan penyelesaian yang tak terhingga.* [5 markah]

24. Find the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Express the inverse of the matrix A as a polynomial in A .

[15 marks]

.../10-

24. Cari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen yang sepadan bagi matriks

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tuliskan songsangan bagi A sebagai suatu polinomial dalam A .

[15 markah]

-ooo000ooo-