

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Kursus Semasa Cuti Panjang  
Sidang Akademik 2006/2007

Jun 2007

**MAA 111 – Algebra For Science Students**  
***[Aljabar Untuk Pelajar Sains]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions** : Answer **all four** [4] questions.

**Arahan** : Jawab **semua empat** [4] soalan.]

...2/-

1. (a) Find a basis and the dimension of the set of all vectors  $[x, y, z]$  where  $2x - y = z + w$ .
- (b) Given the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Find the characteristic polynomial of  $A$ .
- (ii) Find all the eigenvalues for  $A$ .
- (iii) Choosing one of the eigenvalues that you found in part (ii) determine its corresponding eigenvectors.
- (iv) Find  $N(A^2)$  the null space of  $A^2$
- (c) Let  $V$  be a finite dimensional vector space with  $W$  a subspace of  $V$ . Explain why the dimension of  $W$  cannot be greater than the dimension of  $V$ .

[25 marks]

2. (a) Consider the set  $S = \{[3,0,0,1], [3,3,3,2], [0,2,1,2], [0,1,2,1]\}$  of vectors in  $R^4$ . Let  $W$  be the subspace of  $R^4$  spanned by  $S$ . Determine whether the vector  $[1,2,3,4]$  belongs to  $W$ .
- (b) State whether each of the following statements is either true or false.
- (i) Two matrices  $A$  and  $B$  are said to be similar if one of the matrices can be reduced to the other by row operations.
- (ii) The following set  $S$  is a basis for  $R^6$ .  
 $S = \{[3,2,0,8,5,2], [4,3,2,0,4,1], [3,2,1,4,5,2], [2,3,2,1,0,0], [0,3,2,3,2,1], [3,5,3,7,7,3]\}$
- (iii) The set of all vectors of the form  $[a, 2a + b, 2b + 3]$  for all real numbers  $a$  and  $b$  is a subspace of  $R^3$ .
- (iv) The dimension of  $S = \text{Span}\{[1,1,2], [2,1,1], [3,2,3]\}$  is 2.
- (v) The determinant of a square matrix  $A$  is not equal to the determinant of  $A^T B^{-1} B^T$ .
- (vi) The determinant of  $-I$  where  $I$  is an identity matrix is  $-1$ .
- (vii) The matrix  $A - A^T$  is a skew symmetric matrix.
- (viii) If a matrix  $A$  is singular then it can be reduced to an identity matrix using elementary row operations.

[25 marks]

...3/-

1. (a) Cari suatu asas dan dimensi untuk set semua vektor berbentuk  $[x, y, z, w]$  dengan  $2x - y = z + w$ .
- (b) Pertimbangkan suatu matriks

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (i) Dapatkan polinomial cirian untuk  $A$ .
- (ii) Cari semua nilai eigen untuk  $A$ .
- (iii) Dengan memilih satu nilai eigen yang di perolehi dari (ii) dapatkan semua eigen vektor yang sepadan.
- (iv) Cari  $N(A^2)$  ruang nol  $A^2$
- (c) Biar  $V$  suatu ruang vektor yang terhingga dengan  $W$  suatu subruang dari  $V$ . Beri penjelasan kenapa dimensi  $W$  tidak boleh melebihi dimensi  $V$ .

[25 markah]

2. (a) Pertimbangkan set  $S = \{[3, 0, 0, 1], [3, 3, 3, 2], [0, 2, 1, 2], [0, 1, 2, 1]\}$  vektor dalam  $R^4$ . Biarkan  $W$  sebagai subruang  $R^4$  yang dijana oleh  $S$ . Tentukan sama ada  $[1, 2, 3, 4]$  ahli kepada  $W$ .
- (b) Tentukan sama ada setiap pernyataan berikut adalah benar atau palsu.
- (i) Dua matriks  $A$  dan  $B$  disebut serupa jika kita boleh menurunkan satu matriks ke bentuk satu lagi dengan operasi baris.
- (ii) Set  $S$  berikut adalah asas bagi  $R^6$ .  
 $S = \{[3, 2, 0, 8, 5, 2], [4, 3, 2, 0, 4, 1], [3, 2, 1, 4, 5, 2], [2, 3, 2, 1, 0, 0], [0, 3, 2, 3, 2, 1], [3, 5, 3, 7, 7, 3]\}$
- (iii) Set segala vektor berbentuk  $[a, 2a + b, 2b + 3]$  untuk semua nilai nyata  $a$  dan  $b$  ialah suatu subruang bagi  $R^3$ .
- (iv) Dimensi set  $S = \text{Span} \{[1, 1, 2], [2, 1, 1], [3, 2, 3]\}$  ialah 2.
- (v) Penentu suatu matriks segiempat tepat  $A$  adalah tidak sama dengan penentu  $A^T B^{-1} B^T$
- (vi) Penentu matriks  $-I$  dengan  $I$  suatu matriks identiti ialah  $-1$ .
- (vii) Matriks  $A - A^T$  adalah suatu matriks simetri pencong.
- (viii) Jika  $A$  adalah suatu matriks singular maka ia boleh diturunkan kebentuk matriks identiti dengan operasi baris permulaan.

[25 markah]

...4/-

3. (a) Let the set  $S = \{[3,4,0], [1,0,0], [2,2,1]\}$ , show that the set  $S$  forms the basis of  $R^3$ . From the set  $S$  construct the set  $S^* = \{u_1, u_2, u_3\}$  an orthonormal basis of  $R^3$  with  $u_1 = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right]$ . Hence, express the vector  $[2, 2, 1]$  as a linear combination of  $u_1, u_2, u_3$ .
- (b) Show that the set  $S$  consisting of vectors in the form of  $u = [a, a + b, a + 2 + c, a + b - 3c, c]$  where  $a, b, c$  are real numbers is a subspace of  $R^4$ . If  $v = [1, 3, 2, 5]$ , find all values of  $\kappa$  so that  $\kappa v$  belongs to  $S$ .
- (c) Consider  $u = [1, 2, 4, 4]$  and  $v = [2, 2, -3, 1]$
- Find the angle between  $u$  and  $v$ ,
  - Find an orthogonal projection of  $u$  onto  $v$ .

[25 marks]

4. (a) Find all values of  $k$  so that the system of equations

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2k & 4-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- will have a unique solution.
  - will have infinitely many solutions.
  - is not consistent.
- (b) Let  $A$  be  $n \times n$  matrix, show that  $D = AA^T - A - A^T$  is a symmetric matrix.
- (c) Let  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  and  $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
- Find  $A^{-1}$
  - Find  $(AB)^{-1}$
  - Find  $(2B^T)^{-1}$

[25 marks]

...5/-

3. (a) Biar set  $S = \{[3,4,0], [1,0,0], [2,2,1]\}$ , tunjukkan bahawa set  $S$  membentuk asas  $R^3$ . Dari set  $S$  binakan set  $S^* = \{u_1, u_2, u_3\}$  suatu asas ternormal  $R^3$  dengan  $u_1 = \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right]$ . Seterusnya ungkapkan vektor  $[2, 2, 1]$  sebagai suatu gabungan linier  $u_1, u_2, u_3$ .
- (b) Tunjukkan set  $S$  yang mengandungi vektor dalam bentuk  $u = [a, a + b, a + 2 + c, a + b - 3c, c]$  dengan  $a, b, c$  sebagai nombor nyata adalah suatu subruang  $R^4$ . Jika  $v = [1, 3, 2, 5]$ , cari nilai  $k$  supaya  $kv$  ahli kepada  $S$ .
- (c) Pertimbangkan  $u = [1, 2, 4, 4]$  dan  $v = [2, 2, -3, 1]$
- (i) Cari sudut diantara  $u$  dan  $v$ ,
- (ii) Dapatkan unjuran berortogon  $u$  pada  $v$ .

[25 markah]

4. (a) Cari semua nilai  $k$  supaya sistem persamaan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2k & 4-k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (i) akan mempunyai penyelesaian yang unik.
- (ii) akan mempunyai penyelesaian yang tidak terhingga banyaknya.
- (iii) adalah tidak konsisten.
- (b) Biarkan  $A$  suatu matriks  $n \times n$ , tunjukkan  $D = AA^T - A - A^T$  ialah suatu matriks bersimetri.
- (c) Andaikan  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  dan  $B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
- (i) Cari  $A^{-1}$
- (ii) Cari  $(AB)^{-1}$
- (iii) Cari  $(2B^T)^{-1}$

[25 markah]

-ooo000ooo-