

INTERPOLASI DENGAN PENGEKALAN BENTUK MENGGUNAKAN  
NISBAH TIMMER KUBIK

oleh

ZURaida BINTI HASAN

Disertasi diserahkan untuk memenuhi  
sebahagian keperluan bagi  
Ijazah Sarjana Sains Matematik

JUN 2010

## PENGHARGAAN

Bersyukur saya kehadiran Ilahi kerana dengan limpah kurnia-Nya, akhirnya saya berjaya menyiapkan disertasi ini dalam tempoh yang ditetapkan. Alhamdulillah.

Setinggi penghargaan saya ucapkan kepada penyelia saya iaitu Jamaludin Md Ali atas bimbingan serta tunjuk ajar, nasihat dan komen yang tidak jemu-jemu sepanjang kajian ini dijalankan. Terima kasih sekali lagi saya ucapkan kepada beliau kerana kesudian meluangkan masa kepada saya sepanjang tempoh menyiapkan disertasi ini.

Akhir kata, terima kasih tidak terhingga kepada ibu bapa saya serta ahli keluarga yang sentiasa memberi sokongan moral dan juga sentiasa mendokan kejayaan saya.

## JADUAL KANDUNGAN

	Muka Surat
PENGHARGAAN	ii
JADUAL KANDUNGAN	iii
SENARAI JADUAL	v
SENARAI RAJAH	vi
ABSTRAK	viii
ABSTRACT	ix
<b>BAB 1 : PENGENALAN</b>	<b>1</b>
1.1 Interpolasi Data	1
1.2 Lengkung Parametrik Timmer Kubik	3
1.3 Keselajaran di antara Lengkung-lengkung	6
1.4 Masalah Penyelidikan	10
1.5 Objektif Disertasi	10
1.6 Struktur Disertasi	11
<b>BAB 2 : SOROTAN KAJIAN TERDAHULU</b>	<b>12</b>
2.1 Pengekalan Bentuk Lengkung	12
2.2 Lengkung Parametrik Kubik Ball dan Parametrik Kubik Timmer	16

<b>CHAPTER 3 : LENGKUNG NISBAH PARAMETRIK TIMMER KUBIK</b>	<b>17</b>
3.1 Pengenalan	17
3.2 Titik Kolinear	19
3.3 Lengkung Nisbah Timmer kubik dengan Keselajaran $C^1$	22
<b>BAB 4 : FUNGSI NISBAH TIMMER KUBIK</b>	<b>25</b>
4.1 Asas- Asas Kaedah Nisbah Timmer Kubik	25
4.2 Analisis Parameter Bentuk	27
4.3 Penentuan Nilai Parameter Terbitan	28
4.3.1 Kaedah Min Aritmetik	29
4.3.2 Kaedah Min Geometrik	30
4.4 Contoh dan Perbincangan	31
<b>BAB 5 : INTERPOLASI MENGEKALKAN BENTUK LENGKUNG</b>	<b>35</b>
5.1 Interpolasi Splin Positif	36
5.1.1 Perbincangan	38
5.1.2 Pengekalan Bentuk Lengkung Positif bagi Perbezaan Nilai $r_i, q_i$	40
5.2 Interpolasi Splin Berekanaanada	41
5.2.1 Perbincangan	44
5.3 Interpolasi Splin Cembung	46
5.3.1 Perbincangan	49
5.4 Splin Positif dan Berekanaanada	51
5.4.1 Perbincangan	52
<b>BAB 6 : KESIMPULAN DAN CADANGAN</b>	<b>54</b>
<b>RUJUKAN</b>	<b>56</b>

## SENARAI JADUAL

	Muka Surat
Jadual 3.1: Senarai output bagi nilai $t$ dan $w_2$	22
Jadual 4.1: Data Berek Kanada	32
Jadual 4.2: Data Cembung	32
Jadual 4.3: Data positif	32
Jadual 4.4: Set Data Akima	32
Jadual 5.1: Nilai automatik parameter terbitan dan pemberat	53

## SENARAI RAJAH

	Muka Surat
Rajah 1.1: Menginterpolasi data secara cebis demi cebis	2
Rajah 1.2: Lengkung untuk $\alpha = \beta = 4$	5
Rajah 1.3: Perbezaan lengkung Bezier dan lengkung Timmer	5
Rajah 1.4: Cebis demi cebis lengkung nisbah Timmer kubik	9
Rajah 3.1: Lengkung nisbah Timmer kubik	
(a) Nilai pemberat yang berbeza-beza	19
(b) Pergerakan titik $P_1$	19
Rajah 3.2: Lengkung nisbah Timmer kubik	19
Rajah 3.3: Titik kolinear	20
Rajah 3.4: Contoh lengkung nisbah Timmer pada $t$ yang berbeza	22
Rajah 3.5: Dua lengkung nisbah Timmer kubik bersambung dengan keselajaran $C^1$	24
Rajah 4.1: Kesan ketegangan ke atas lengkung	27
Rajah 4.2: Lengkung lalai untuk data berekanada	33
Rajah 4.3: Lengkung lalai untuk data cembung	33
Rajah 4.4: Lengkung lalai untuk data positif	33
Rajah 4.5: Lengkung lalai untuk set data Akima	33
Rajah 5.1: Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.3	39

Rajah 5.2:	Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.1	39
Rajah 5.3:	Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.4	39
Rajah 5.4:	Bentuk positif lengkung splin nisbah Timmer kubik bagi data dalam Jadual 4.3	41
	(a) Nilai positif berbeza bagi $r_i$ dan $q_i$	41
	(b) $r_i = -3$ , $q_i = -3$ , untuk semua $i$	41
Rajah 5.5:	(a) Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.1	45
	(b) Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.2	45
	(c) Pengekalan bentuk lengkung bagi data dalam Jadual 4.4	46
Rajah 5.6:	Pengekalan bentuk cembung lengkung splin nisbah Timmer kubik bagi data dalam Jadual 4.2	50
Rajah 5.7:	Pengekalan bentuk cembung lengkung splin nisbah Timmer kubik bagi data dalam Jadual 4.3	50
Rajah 5.8:	Splin nisbah Timmer kubik untuk data positif dan berekanada bagi Jadual 4.1	•
	(a) Lengkung lalai	53
	(b) Pengekalan lengkung	53

## ABSTRAK

Lengkung yang terbentuk daripada skim fungsi asas walaupun licin tetapi tidak menjamin pengekalan bentuk lengkung. Masalah ini dikaji dan dibincangkan dalam disertasi ini. Disertasi ini adalah berkenaan interpolasi pengekalan bentuk lengkung data positif, berekanada dan cembung. Model yang digunakan untuk menginterpolasi titik-titik data ialah nisbah Timmer kubik secara cebis demi cebis. Nisbah ini mempunyai dua parameter pemberat yang berperanan untuk mengawal bentuk lengkung dalam setiap selang sehingga bentuk lengkung yang diinginkan diperolehi. Skim telah dibangunkan dengan mengikut syarat-syarat tertentu untuk mengekalkan bentuk bagi setiap data. Keselajaran kelicinan yang dicapai untuk menyambungkan dua lengkung yang bersebelahan ialah  $C^1$ .



# INTERPOLATION WITH SHAPE PRESERVATION USING TIMMER RATIONAL CUBICS

## ABSTRACT

The shape of the original function schemes although is smooth, but it does not preserved the shape of the curve. This problem will be discussed in this dissertation. This dissertation is about shape preserving interpolant for positive, monotone and convex data. The model that uses to interpolate the data points is piecewise Timmer rational cubics. In the description of rational interpolant, it contains two families of parameters to preserve the shape of the data in each interval. The scheme has been developed for automated generation of preserving shape of each data points. The degree of smoothness for interpolation attained is  $C^1$ .

# BAB 1

## PENGENALAN

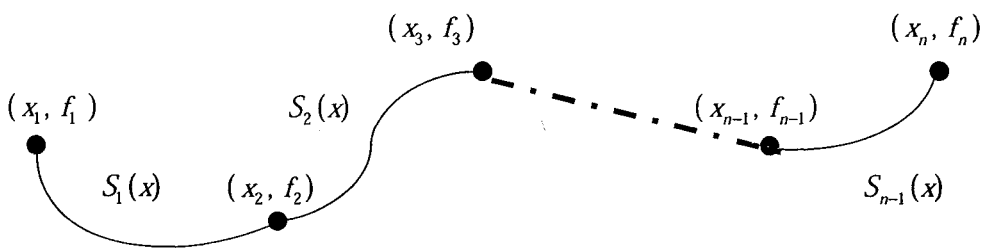
### 1.1 Interpolasi Data

Sistem rekabentuk geometri berasaskan komputer (CAGD) atau dikenali sebagai pemodelan geometrik telah dibangunkan bagi memudahkan kerja-kerja menghasilkan objek yang di inginkan dengan menggunakan CAD. CAGD begitu pesat digunakan dalam industri-industri terutamanya industri yang berkaitan dengan pembuatan bahan seperti automatif, angkasa lepas dan pembuatan kapal. Sebagai contoh, syarikat pengeluar kereta Renault telah memodelkan kereta mereka dengan kaedah Bezier di dalam sistem UNISURF. Antara contoh objek-objek lain yang berjaya dimodel dengan menggunakan sistem rekabentuk berasaskan komputer CAD ialah teko teh, badan kereta, badan kapal dan sebagainya. Pada masa ke masa, CAGD telah digunakan secara meluas termasuklah dalam menghasilkan animasi karton seperti *Finding Nemo* dan *Shrek* yang sepenuhnya dihasilkan menggunakan komputer (Salmon, 2006).

Model-model yang terhasil daripada sistem rekabentuk berasaskan komputer CAD adalah hasil daripada pencorakkan bentuk lengkung dan permukaan. Item yang penting dalam pembentukan lengkung dan permukaan ialah interpolasi. Interpolasi adalah suatu kaedah alternatif pembentukkan lengkung daripada sampel set-set data

untuk membentuk lengkung yang menghampiri titik data. Dalam masalah interpolasi, adalah tidak diinginkan daripada model yang tidak melalui semua set titik data yang diberikan. Kekekapan masalah yang timbul akan meningkat apabila interpolasi dikaitkan dengan sampel set data. Hal ini adalah disebabkan oleh penyelesaian kepada masalah interpolasi tidak memberikan model yang bagus kerana ia memerlukan darjah yang tinggi untuk melepasi semua titik-titik data. Sebagai suatu alternatif untuk mengatasi masalah ini ialah membangunkan model penginterpolasi data secara cebis demi cebis.

Salomon (2006), interpolasi merupakan kaedah untuk membentuk lengkung licin yang melepasi set titik. Dalam bahasa Latin, interpolasi (*interpolation*) berasal dari perkataan *inter* (between) dan *polare* (to polish), yang memberi maksud membina nilai baru yang melalui di antara titik yang di berikan. Pembentukan lengkung yang licin diperolehi dengan menginterpolasi set data secara cebis demi cebis. Dalam menginterpolasi data, satu fungsi diwujudkan bagi membentuk garisan di antara dua titik. Fungsi ini adalah pelbagai samada linear, Bezier, Ball, Timmer dan sebagainya. Ianya bergantung kepada kemahuan pengguna. Lihat Rajah 1.1 sebagai pengetahuan tentang interpolasi cebis demi cebis.



Rajah 1.1: Menginterpolasi data secara cebis demi cebis

untuk melalui titik tengah segmen  $P_1-P_2$  (Sederberg, 2007). Fungsi ikatan (blending) bagi Timmer PC adalah

$$\begin{aligned} f_0(t) &= (1-2t)(1-t)^2 \\ f_1(t) &= 4t(1-t)^2 \\ f_2(t) &= 4t^2(1-t) \\ f_3(t) &= (2t-1)t^2 \end{aligned} \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

Andaikan  $P_0, P_1, P_2$  dan  $P_3$  adalah titik kawalan lengkung. Maka parametrik Timmer kubik boleh ditulis sebagai

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0 f_0(t) + P_1 f_1(t) + P_2 f_2(t) + P_3 f_3(t) \\ &= (1-2t)(1-t)^2 P_0 + 4t(1-t)^2 P_1 + 4t^2(1-t) P_2 + (2t-1)t^2 P_3 \end{aligned}$$

Pada asalnya, fungsi Timmer PC ini berasal dari lengkung kubik serupa Bezier (Said, (1990)) seperti di bawah

$$\begin{aligned} f_0(t) &= [1 + (2 - \alpha)t](1-t)^2 \\ f_1(t) &= \alpha t(1-t)^2 \\ f_2(t) &= \beta t^2(1-t) \\ f_3(t) &= [1 + (2 - \beta)(1-t)]t^2 \end{aligned} \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

dengan nilai  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah sebarang nombor nyata. Bentuk lengkung boleh diubahsuai dengan mengubah nilai parameter. Jika nilai  $\alpha = 2 = \beta$ , lengkung yang terhasil adalah perwakilan Ball (Jamaludin *et al.* (2004)). Apabila  $\alpha = 3 = \beta$ , digunakan, ianya menjadi asas polinomial Bernstein manakala apabila  $\alpha = 4 = \beta$ , fungsi itu akan menjadi asas polinomial Timmer PC. Rajah 1.2 di bawah menunjukkan lengkung asas polinomial Timmer PC.

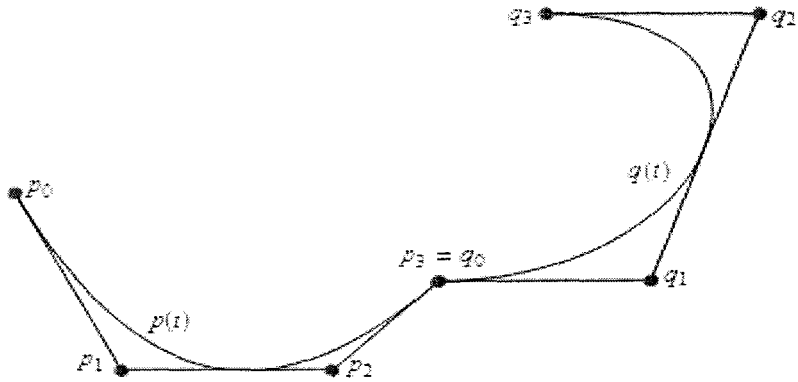
parametrik. Pada kebiasaanya, polinomial berdarjah tiga digunakan dalam grafik komputer kerana lengkung-lengkung boleh bersambung dengan pencapaian peringkat keselajaran yang paling tinggi iaitu 2, di mana pada titik modal wujudnya terbitan pertama dan kedua. Sebagai contoh, Piere menggunakan Bezier kubik untuk memodelkan kereta keluaran Renault. Dalam disertasi ini, kajian hanya menggunakan fungsi parametrik Timmer kubik untuk menginterpolasi data-data yang diberikan.

Pertimbangan peringkat kelicinan bagi lengkung polinomial cebis demi cebis adalah sangat penting bagi menghasilkan lengkung yang baik. Dua lengkung polinomial dikatakan selanjar apabila ianya bertemu pada titik modal (break point). Peringkat kelicinan bagi dua lengkung polinomial yang selanjar adalah berdasarkan kepada bilangan terbitan yang ditakrifkan pada titik modal. Terdapat dua jenis keselajaran yang di pertimbangkan dalam sistem CAD, iaitu keselajaran geometrik ( $G$ ) dan parametrik ( $C$ ). Dalam mempertimbangkan peringkat kelicinan lengkung, adalah penting untuk membezakan samada sesuai atau tidak untuk menimbangkan kelicinan parametrik atau kelicinan geometrik. Keselajaran parametrik ditakrifkan dalam bentuk arah dan magnitud tangen vektor manakala keselajaran geometrik pula pentakrifannya hanya pada arah tangen vektor sahaja.

Terdapat aras yang berbeza-beza bagi kes keselajaran pada titik modal, ia bermula dengan aras paling bawah;  $C^0$  dan  $G^0$ . Keselajaran  $C^0$  dan  $G^0$  mewakili kepada keselajaran titik. Keselajaran titik ini merupakan dua lengkung yang bersambung pada titik modal.  $C^1$  dan  $G^1$  pula merupakan perwakilan kepada ketangenan lengkung atau ketangenan yang merentasi dua lengkung yang selanjar

dan dikenali juga sebagai terbitan peringkat pertama. Bagi membolehkan dua lengkung menjadi  $C^1$  atau  $G^1$ , ia haruslah bersambung pada titik modal dan juga merupakan  $C^0$  atau  $G^0$ . Keselajaran ketangenan membawa maksud tangen pada titik akhir bagi segmen pertama adalah sama arah atau selari dengan tangen pada titik pertama bagi segmen yang bersebelahan dengannya dan kedua-duanya berkongsi pada titik modal. Sebagai tambahan,  $C^1$  adalah keselajaran yang memerlukan panjang tangen yang sama dan merupakan terbitan pertama yang pentakrifannya rapi (well-defined) pada titik penyambungan. Keselajaran  $G^1$  adalah sedikit lemah, mempunyai arah tangen lengkung yang sama tetapi tidak semestinya sama magnitud atau unit tangen. Perkara ini bermaksud setiap lengkung yang berkeselajaran  $C^1$  ialah  $G^1$  dan sama juga bagi setiap lengkung yang berkeselajaran  $C^2$  adalah  $G^2$  yang mana pentakrifan terbitan pertama dan kedua adalah rapi kepada lengkung. Umumnya, keselajaran geometrik memberikan kebebasan pada penambahan darjah yang berguna untuk mengawal bentuk lengkung berbanding dengan keselajaran parametrik.

Gabungan dua lengkung parametrik Timmer kubik,  $p(t)$  dan  $q(t)$  ditakrifkan pada  $t \in [0,1]$  ditunjukkan dalam Rajah 1.4 di bawah. Dua segmen lengkung ini bersambung bersama pada suatu aras keselajaran pada titik modal (titik sepunya);  $p_3 = q_0$ .  $p_0, p_1, p_2$  dan  $p_3$  adalah titik kawalan bagi lengkung  $p(t)$  manakala  $q_0, q_1, q_2$  dan  $q_3$  merupakan titik kawalan kepada lengkung  $q(t)$ .



Rajah 1.4: Cebis demi cebis lengkung Timmer kubik

Pada titik modal (sepunya)  $p_3 = q_0$ , terdapat pelbagai peringkat keselajaran yang boleh dicapai. Ia bergantung kepada kesesuaian bentuk yang diperlukan. Antara keselajaran yang dapat dicapai pada titik modal adalah seperti yang dinyatakan dalam teorem di bawah:

**Teoram 1.1:** (Agoston, 2004)

- 1) Dua lengkung parametrik bersambung dengan keselajaran  $G^1$  jika dan hanya jika ia mempunyai unit vektor tangen yang sama pada titik sepunya.
- 2) Dua lengkung parametrik bersambung dengan keselajaran  $G^2$  jika dan hanya jika ianya mempunyai tangen unit dan vektor kelengkungan yang sama pada titik sepunya yang mana panjang lengkung pemparameteran ialah  $C^2$ .
- 3) Secara amnya, dua lengkung parametrik bersambung dengan keselajaran  $G^k$  jika dan hanya jika panjang lengkung pemparameteran (arc-length parameterization) daripada gabungan ialah  $C^k$  pada titik sepunya;  $C^k$  mewakili kelicinan parametrik bagi peringkat  $k$  manakala  $G^k$  pula merupakan perwakilan kepada kelicinan geometrik pada peringkat  $k$ .

## 1.4 Masalah Penyelidikan

Rekabentuk lengkung dengan bantuan perisian CAD mendapat sambutan daripada pengkaji-pengkaji. Dalam membentuk lengkung, keselajaran di antara lengkung dititikberatkan bagi menghasilkan lengkung yang licin. Walaubagaimanapun, masih ada lagi masalah yang timbul apabila membincangkan tentang pengekalan bentuk lengkung.

Berdasarkan kepada kajian terdahulu, satu alternatif telah diperkenalkan untuk mengekalkan bentuk lengkung iaitu menambah parameter bentuk pada fungsi polinomial tersebut dan pengekalan lengkung ini adalah secara automatik iaitu hasil penjanaan automatik nilai parameter bentuk itu. Susulan daripada kajian pengekalan lengkung oleh Safraz *et al.* (1997) dengan menggunakan fungsi nisbah kubik; kubik pada pengangka dan kurdratik pada penyebut, Safraz *et al.* (2001) mengekalkan bentuk lengkung dengan menggunakan fungsi nisbah Bezier kubik dan Jamaludin *et al.* (2004) pula pengekalan lengkung adalah pada fungsi nisbah Ball kubik, kajian akan diteruskan dalam disertasi ini dengan menggunakan fungsi nisbah Timmer kubik.

## 1.5 Objektif Disertasi

Objektif yang paling utama dalam disertasi ini ialah untuk mengekalkan bentuk lengkung nisbah Timmer kubik daripada data-data yang diberikan. Skop yang terlibat dalam disertasi ini ialah



- a) Menginterpolasi data positif, berekanada dan cembung dengan keselajaran  $C^1$  menggunakan fungsi nisbah Timmer kubik.
- b) Mengira nilai-nilai terbitan daripada data yang diberikan.
- c) Mendapatkan pengiraan nilai parameter bentuk (pemberat) secara automatik bagi setiap data yang diberikan untuk mengekalkan bentuk lengkung nisbah Timmer kubik.

## 1.6 Struktur Disertasi

Bahagian ini memberikan gambaran keseluruhan tentang disertasi ini. Disertasi ini mempunyai 6 bahagian

- Bab 1, menggariskan kefahaman terhadap interpolasi, keselajaran lengkung dan pengenalan terhadap lengkung Timmer kubik.
- Bab 2, mempersembahkan sorotan kajian terdahulu yang berkaitan dengan pengekalan bentuk lengkung bagi data positif, berekanada dan cembung.
- Bab 3, lengkung nisbah parametrik Timmer kubik.
- Bab 4, membincangkan asas-asas kaedah nisbah Timmer kubik dengan keselajaran  $C^1$ .
- Bab 5 pula menyentuh isu yang berkaitan dengan pengiraan secara automatik nilai pemberat bagi mengekalkan bentuk lengkung.
- Bab 6, merupakan bahagian paling akhir. Dalam bab ini, perbincangan tertumpu kepada kesimpulan ke atas disertasi serta cadangan kajian bagi masa akan datang.

## BAB 2

### SOROTAN KAJIAN TERDAHULU

Dalam sistem rekabentuk bantuan komputer (CAD), pengguna memerlukan data samada diperolehi daripada fungsi kompleks ataupun daripada suatu fenomena saintifik untuk digambarkan dalam bentuk lengkung. Pengekalan bentuk merupakan aspek penting dalam merekabentuk lengkung licin. Masalah interpolasi pengekalan bentuk telah dipertimbangkan oleh beberapa orang pengkaji. Bab ini memberi tumpuan tentang kajian mereka berdasarkan pengekalan bentuk lengkung daripada data positif, cembung dan berekanada.

#### 2.1 Pengekalan Bentuk Lengkung

Delbourgo dan Gregory (1983), menyelesaikan masalah pengekalan bentuk menggunakan fungsi nisbah kubik cebis demi cebis; interpolasi  $C^1$ . Mereka menggunakan satu data bagi menguji pada data itu samada boleh membentuk lengkung berekanada dan/atau cembung. Penyelesaian ini disertakan dengan analisis ralat. Batas ralat yang bagus diperolehi apabila maklumat yang tepat bagi nilai terbitan pada titik data diberi.

Dalam kertas kerja yang disediakan oleh Safraz *et al.* (1997), perbincangannya tertumpu pada data berekanada sahaja. Fungsi yang digunakan dalam pengekalan bentuk lengkung ialah fungsi nisbah secara cebis demi cebis yang mana kubik pada pengangka dan kuadratik pada penyebut. Interpolasi  $C^1$  fungsi nisbah ini memberikan tiga parameter bentuk. Satu darinya adalah untuk menjamin pengekalan bentuk manakala dua darinya adalah bebas dari pengguna untuk mengawal lengkung dan mendapatkan lengkung yang diinginkan. Mereka juga membincangkan tentang analisis batas ralat seperti yang dibincangkan oleh Delbourgo dan Gregory (1983).

Safraz (2000) meneruskan kajian terhadap pengekalan lengkung nisbah yang licin ke atas data berekanada. Penghuraian interpolasi nisbah ini melibatkan dua parameter bentuk yang berkekangan untuk mengekalkan lengkung daripada data berbanding Safraz *et al.* (1997), melibatkan tiga parameter bentuk. Beliau membangunkan skim kelicinan  $C^2$  untuk mendapatkan parameter terbitan. Penyelesaian parameter terbitan ini diperoleh daripada penyelesaian kaedah '*LU decomposition*'. Di samping itu, beliau telah membuat perbandingan berkaitan kelicinan lengkung di antara  $C^1$  dan  $C^2$ , dan didapati darjah kelicinan yang tinggi akan menghasilkan lengkung yang lebih baik kelicinannya.

Safraz *et al.* (2001), menimbangkan splin nisbah kubik pada data positif dan berekanada. Pada masa yang sama, mereka membangunkan skim untuk data yang dapat membentuk lengkung positif dan/atau berekanada. Manakala Safraz (2002) pula menimbangkan pengekalan bentuk lengkung pada data positif dan cembung dari penginterpolasi splin nisbah kubik. Menginterpolasi data secara cebis demi cebis

menggunakan kaedah splin nisbah kubik juga turut dibincangkan oleh Safraz dan Husain (2006). Mereka telah mempertimbangkan bentuk-bentuk lengkung data positif, berekanada dan cembung. Semua kajian ini adalah pada keselajaran lengkung  $C^1$ .

Jamaludin *et al.* (2004), mengkaji pengekalan bentuk lengkung dengan menggunakan nisbah kubik yang dikenali sebagai fungsi nisbah kubik Ball yang di perkenalkan oleh Ball (1974). Kajian dalam kertas kerjanya merupakan susulan kajian yang telah dilaksanakan oleh Safraz (1997, 2000, 2002) pada nisbah Bezier kubik secara cebis demi cebis untuk menginterpolasi set data. Mereka telah merekabentuk lengkung daripada data positif, cembung dan berekanada yang diperoleh daripada keselajaran  $C^1$ . Di samping itu, mereka dapat membuat satu kesimpulan daripada satu aplikasi contoh yang mudah daripada positif data iaitu data yang berkaitan dengan kadaran pembiakan larva nyamuk dengan kuantiti hujan.

Yahaya *et al.* (2006), membincangkan tentang pengekalan bentuk lengkung, bagi menggambarkan data-data saintifik menggunakan interpolasi kuartik serupa Bezier cebis demi cebis. Dalam kajiannya, fungsi yang di gunakan melibatkan tiga parameter untuk mengawal bentuk lengkung. Mereka membentuk lengkung kuartik serupa Bezier dengan keselajaran  $C^1$  yang menginterpolasi set titik data positif, cembung dan berekanada.

Fijasri *et al.* (2006) juga menghasilkan bentuk lengkung dan permukaan dengan menggunakan lengkung kuartik serupa Bezier yang mana kuartik serupa

Bezier yang digunakan adalah aduan dua fungsi daripada lengkung kubik serupa Bezier yang membentuk fungsi linear iaitu

$$r(t) = (1-t)r_1(t) + tr_2(t) \quad ; 0 \leq t \leq 1$$

di mana

$$r_1(t) = (1-t)(1 + (2-\alpha)t)P_1 + \alpha(1-t)^2 tP_2 + \gamma_1(1-t)t^2 P_3 + t^2(1 + (1-t)(2-\gamma_1))P_4$$

dan

$$r_2(t) = (1-t)(1 + (2-\gamma_2)t)P_1 + \gamma_2(1-t)^2 tP_2 + \beta(1-t)t^2 P_3 + t^2(1 + (1-t)(2-\beta))P_4$$

Di beri titik kawalan  $P_1, P_2, P_3$  dan  $P_4$  dan mempunyai empat parameter kawalan bentuk,  $\alpha, \beta, \gamma$  dan  $\gamma_2$ . Mereka telah mengaplikasikan fungsi ini untuk melakarkan permukaan sapuan. Di samping itu, mereka dapat membuat kesimpulan bahawa lengkung kubik serupa Bezier adalah lebih baik jika dibandingkan dengan lengkung kubik Bezier.

Kertas kerja Husain dan Safraz (2008), merupakan kajian pada data positif, menggunakan penginterpolasi nisbah kubik bagi mengekalkan kepositifan bentuk. Suatu data dalam kajian itu merupakan data yang diperolehi dari suatu eksperimen bahan kimia. Fungsi nisbah yang digunakan melibatkan empat parameter kawalan, dua daripadanya merupakan parameter kawalan yang diperolehi secara automatik manakala baki dua daripada parameter bebas mengikut kemahuan pengguna. Kemudian mereka melanjutkan splin nisbah kubik kepada nisbah bikubik pada permukaan.

## 2.2 Lengkung Parametrik Ball Kubik dan Parametrik Timmer Kubik

Gobhitasan dan Jamaludin (2004), memfokuskan langkah bagi pembentukan lengkung Timmer PC yang berkeselajaran  $G^1$  dan  $G^2$ . Akhirnya, mereka mempersembahkan profil gelas wain sebagai aplikasi bagi permukaan Timmer PC pada keselajaran  $G^2$ .

Pada tahun 2005 pula, Gobhitasan dan Jamaludin membincangkan satu algoritma untuk mereka-bentuk lengkung bagi keselajaran  $G^2$  secara interaktif. Parametrik Timmer kubik ialah fungsi yang menjadi pilihan mereka bagi mereka-bentuk lengkung. Alternatif yang mereka gunakan untuk membentuk lengkung Timmer ialah dengan menggunakan titik kawalan hujung dan unit tangen vektor yang mana arah lengkung Timmer dapat dikawal dengan hanya mengawal vektor tangen unit. Algoritma yang mereka bangunkan untuk lengkung Timmer bagi keselajaran  $G^2$  telah diaplikasikan dalam bentuk berangka iaitu dengan membentuk pasu bunga. Hasil daripada mereka-bentuk profil pasu bunga itu, mereka dapat membuktikan algoritma yang mereka bangunkan itu mempunyai kelebihan.

Kajian yang dijalankan oleh Gobhitasan *et al.* (2005) adalah sama dari segi matlamatnya dan kaedahnya seperti dalam kertas kerja Gobhitasan dan Jamaludin (2004). Tetapi yang membezakan kajiannya adalah pada penggunaan fungsi yang berlainan. Bagi Gobhitasan *et al.* (2005), mereka membangunkan algoritma keselajaran lengkung  $G^2$  dengan menggunakan fungsi parametrik kubik Ball. Mereka mengaplikasikan algoritma ini dengan membentuk profil bekas bunga.

## BAB 3

### LENGKUNG NISBAH PARAMETRIK TIMMER KUBIK

#### 3.1 Pengenalan

Lengkung nisbah Timmer kubik merupakan perluasan daripada lengkung asal Timmer kubik. Lengkung Timmer kubik telah di bincangkan secara tidak langsung di bahagian 1.2. Dalam grafik komputer, polinomial kubik sering digunakan kerana lengkung polinomial peringkat rendah mempunyai kekenduran lengkung yang rendah, manakala lengkung yang terbentuk daripada polinomial peringkat tinggi cenderung mempunyai ayunan yang tidak di perlukan.

Persamaan bagi nisbah parametrik Timmer kubik ialah

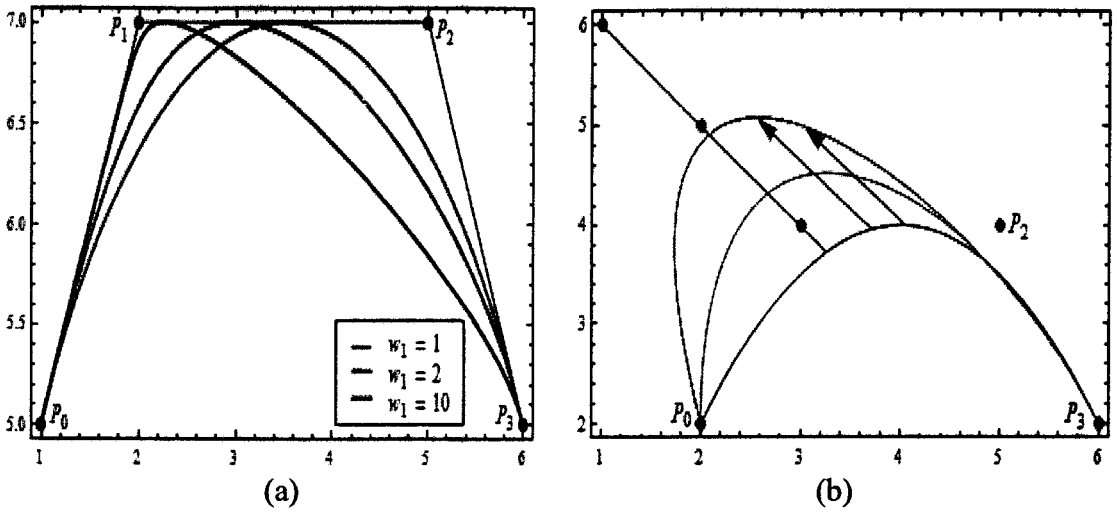
$$s(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 w_i P_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^3 w_i f_i(t)} = \sum_{i=0}^3 P_i \left[ \frac{w_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^3 w_i f_i(t)} \right] = \sum_{i=0}^3 P_i R_{3,i}(t) , \quad 0 \leq t \leq 1$$

$P_0, P_1, P_2$  dan  $P_3$  adalah titik-titik pada lengkung dan  $w_i$  ialah pemberat.  $R_{3,i}(t)$  ialah fungsi pemberat yang baru dan merupakan nisbah polinomial. Fungsi nisbah baru ini terdiri daripada pemberat  $w_i$  yang merupakan parameter tambahan untuk mengawal bentuk lengkung tersebut. Fungsi ini dipanggil fungsi nisbah kerana  $R_{3,i}(t)$

berada dalam bentuk nisbah polinomial. Nilai pemberat  $w_i$  yang digunakan adalah positif kerana jika nilai pemberat adalah negatif ia mungkin memberikan penyebut bernilai sifar (Salomon, 2006).

Bentuk lengkung yang diingini boleh diperolehi dengan mengubah kedudukan titik-titik atau nilai pemberat-pemberat. Rajah 3.1 dibawah menunjukkan perbezaan lengkung-lengkung yang terbentuk terhadap perubahan-perubahan tersebut. Rajah 3.1(a) menunjukkan lengkung yang terbentuk daripada penggunaan nilai pemberat yang berbeza-beza. Nilai pemberat berubah pada  $w_i$  di mana  $w_i = 1, 2, 10$ . Apabila nilai  $w_i$  semakin meningkat, lengkung akan tertolak ke arah titik  $P_1$  dan dalam masa yang sama titik-titik persendirian pada lengkung menumpu pada  $P_1$ . Jika semua nilai pemberat yang digunakan adalah bernilai 1, lengkung yang terbentuk akan menjadi lengkung bukan nisbah Timmer kubik atau dikenali sebagai lengkung Timmer kubik. Manakala Rajah 3.1(b) pula ialah lengkung-lengkung yang terbentuk apabila titik kawalan  $P_1$  diubah-ubah dan semua nilai pemberat ditetapkan 1. Sekali lagi dapat dilihat, lengkung nisbah ini tertarik ke arah titik  $P_1$  dan di samping itu, semua titik pada lengkung bergerak dalam arah yang sama dengan titik  $P_1$ .



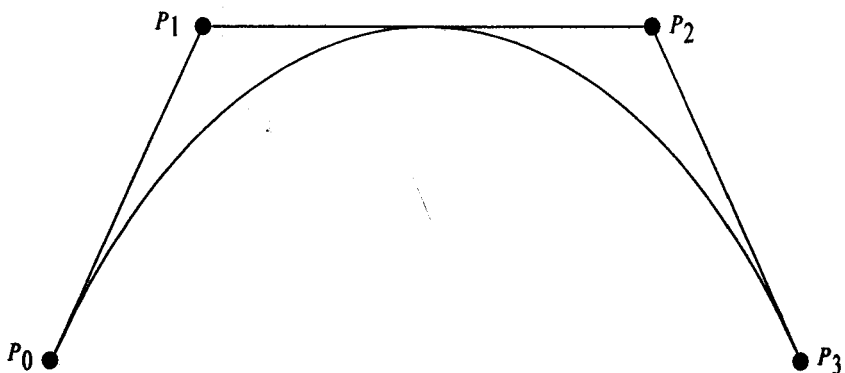


Rajah 3.1: Lengkung nisbah Timmer kubik (a) Nilai pemberat yang berbeza-beza (b) Pergerakan titik  $P_1$

### 3.2 Titik Kolinear

Lengkung nisbah Timmer kubik terdiri daripada empat titik kawalan lengkung dan setiap satunya bersekutu dengan parameter pemberat seperti ditunjukkan dalam Pers. (3.1) di bawah

$$s(t) = \frac{w_0 P_0 (1-2t)(1-t)^2 + w_1 P_1 4t(1-t)^2 + w_2 P_2 4t^2(1-t) + w_3 P_3 (2t-1)t^2}{w_0 (1-2t)(1-t)^2 + w_1 4t(1-t)^2 + w_2 4t^2(1-t) + w_3 (2t-1)t^2}; t \in [0,1] \quad (3.1)$$



Rajah 3.2: Lengkung nisbah Timmer kubik

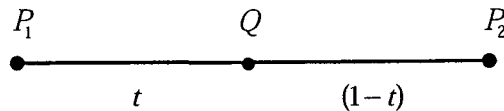
Lengkung nisbah Timmer kubik dalam Rajah 3.2 di atas terbentuk daripada Pers. (3.1), titik  $P_0$  dan  $P_3$  merupakan titik hujung bagi lengkung itu. Lengkung ini maksimum pada  $t=1/2$  iaitu lengkung menyentuh pada titik tengah segmen di antara titik  $P_1$  dan  $P_2$ . Kelakuan ini dapat dilihat dalam Pers. (3.2) di bawah

$$s(0) = P_0 \quad (3.2a)$$

$$s(1/2) = \frac{w_1 P_1 + w_2 P_2}{w_1 + w_2} = \frac{w_1}{w_1 + w_2} P_1 + \frac{w_2}{w_1 + w_2} P_2 = Q \quad (3.2b)$$

$$s(1) = P_3 \quad (3.2c)$$

Andaikan  $Q$  adalah titik yang berada diantara titik  $P_1$  dan  $P_2$ . Bentuk lengkung Timmer boleh dipelbagaikan dengan mengubah titik  $Q$ . Gambaran titik  $Q$  diringkaskan dalam Rajah 3.3



Rajah 3.3: Titik kolinear

Oleh kerana  $Q$  berada segaris dengan titik  $P_1$  dan  $P_2$ ,  $Q$  boleh ditulis dalam bentuk koordinat berpusat sebagai

$$Q = (1-t)P_1 + tP_2 \quad (3.3)$$

untuk beberapa nilai  $t$ . Koordinat berpusat ialah hasil tambah pekali  $P_i$  memberikan hasil jumlah adalah 1. Apabila  $t=0$ , diperolehi titik  $P_1$  manakala jika  $t=1$  titik  $P_2$  diperolehi. Titik  $P_1, Q$  dan  $P_2$  adalah segaris, maka ia boleh ditulis dalam bentuk nisbah  $Q$  iaitu

$$\text{nisbah}(P_1, Q, P_2) = P_1Q : P_2Q = \frac{t}{1-t} \quad (3.4)$$

di mana  $t/1-t$  ialah pecahan bagi kadar panjang segmen  $P_1Q : P_2Q$ . Bandingkan

Pers. (3.2b) dan (3.3), maka

$$\frac{w_1}{w_1 + w_2} = 1 - t; \quad \frac{w_2}{w_1 + w_2} = t \quad (3.5)$$

daripada Pers. (3.5) diperolehi

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{t}{1-t} \quad (3.6)$$

Andaikan  $w_1 = 1$ , maka Pers. (3.6) menjadi

$$w_2 = \frac{t}{1-t} \quad (3.7)$$

Suatu alternatif untuk mendapatkan nilai  $t$  adalah dengan menganggap  $t$  dalam bentuk nisbah panjang segmen iaitu

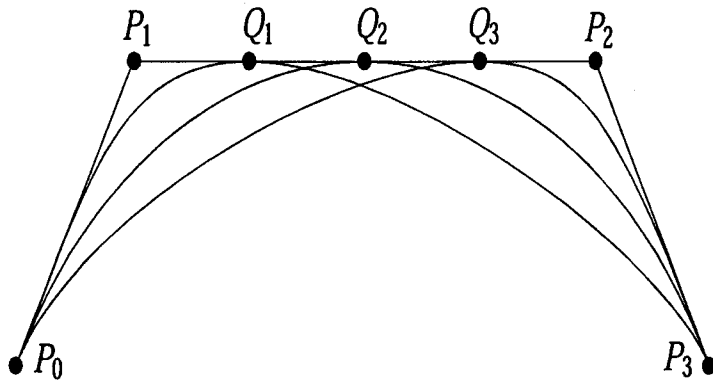
$$t = \frac{|P_1Q|}{|P_1P_2|}. \quad (3.8)$$

Dari Pers. (3.8), nilai  $t$  dapat ditentukan dengan menetapkan titik  $Q$ . Di samping itu juga, nilai pemberat  $w_2$  yang secocok diperolehi daripada Pers. (3.7). Daripada nilai pemberat  $w_2$  yang diperolehi, bentuk lengkung yang melalui titik  $Q$  yang sesuai dengan nilai  $t$  dapat dibentuk. Sebagai contohnya, andaikan titik  $P_0, P_1, P_2$  dan  $P_3$  masing-masing adalah  $\{1,1\}, \{2,3\}, \{6,3\}$  dan  $\{7,1\}$ . Nilai-nilai yang diperolehi daripada Pers. (3.7), (3.8) diringkaskan dalam Jadual 3.1 di bawah.

Rajah 3.4 di bawah, menunjukkan lengkung parametrik Timmer kubik pada titik  $Q$  yang berbeza-beza.

Jadual 3.1: Senarai output bagi nilai  $t$  dan  $w_2$

$i$	1	2	2
$Q_i$	{3,3}	{4,3}	{5,3}
$t$	1/4	1/2	3/4
$w_2$	1/3	1	3



Rajah 3.4: Contoh lengkung nisbah Timmer pada  $t$  yang berbeza

### 3.3 Lengkung Nisbah Timmer kubik dengan Keselajaran $C^1$

Persamaan (3.9) di bawah adalah dua fungsi nisbah Timmer kubik yang ditakrif dalam selang  $t \in [0,1]$ , masing-masing dengan empat titik kawalan dan parameter pemberat,  $w_i$  untuk  $i=0,1,2,3$ .  $P_0, P_1, P_2, P_3$  dan  $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3$  masing-masing ialah titik kawalan bagi lengkung  $s_1(t)$  dan  $s_2(t)$ .

$$s_1(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 w_i P_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^3 w_i f_i(t)}; \quad \text{dan} \quad s_2(t) = \frac{\sum_{i=0}^3 w_i Q_i f_i(t)}{\sum_{i=0}^3 w_i f_i(t)}; \quad t \in [0,1] \quad (3.9)$$

di mana

$$f_0 = (1-t)^2(1-2t);$$

$$f_1 = 4t(1-t)^2;$$

$$f_2 = 4t^2(1-t);$$

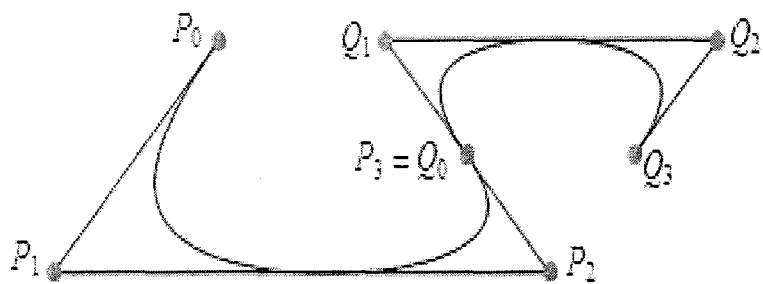
$$f_3 = t^2(2t-1);$$

Dua lengkung nisbah Timmer dikatakan selanjar  $C^1$  apabila memenuhi ciri-ciri di bawah.

$$\bullet \quad s_1(1) = s_2(0) \Rightarrow P_3 = Q_0 \quad (3.10)$$

$$\bullet \quad s_1'(1) = s_2'(0) \Rightarrow 4 \frac{w_2}{w_3} (P_3 - P_2) = 4 \frac{w_1}{w_0} (Q_1 - Q_0) \quad (3.11)$$

$s_i(t)$  merupakan terbitan pertama terhadap  $t$  dan merupakan vektor tangen bagi lengkung nisbah Timmer. Vektor tangen ini adalah penting sebagai petunjuk kelicinan bagi dua lengkung yang bersambung pada titik modal. Lengkung nisbah Timmer yang selanjar  $C^1$ , vektor tangennya adalah sama pada titik modal. Gambaran keselantaran  $C^1$  bagi lengkung nisbah Timmer dapat dilihat dalam Rajah 3.5 di bawah. Dalam rajah itu, dapat dilihat  $P_3$  dan  $Q_0$  merupakan titik modal yang mana dua lengkung bersambung bersama. Lengkung nisbah Timmer menginterpolasi pada titik hujung iaitu pada  $t=0$ , lengkung berada pada titik mula manakala pada  $t=1$ , lengkung berada pada titik akhir (Persamaan 3.10).



Rajah 3.5: Dua lengkung nisbah Timmer kubik bersambung dengan keselantaran  $C'$