UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2013/2014 Academic Session

December 2013/January 2014

EEE 232 – COMPLEX ANALYSIS
[ANALISIS KOMPLEKS]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN (7) pages of printed material and ONE (1) page of Appendix before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH (7) mukasurat dan Lampiran SATU (1) muka surat bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: This question paper consists of FIVE (5) questions. Answer **FIVE** (5) questions. All questions carry the same marks.
[***Arahan:*** *Kertas soalan ini mengandungi LIMA (5) soalan. Jawab **LIMA** (5) soalan. Semua soalan membawa jumlah markah yang sama.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.
[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

1. (a) Tunjukkan yang $32\sin^4\theta\cos^2\theta = \cos 6\theta - 2\cos 4\theta - \cos 2\theta + 2$

Show that $32sin^4\theta cos^2\theta = cos6\theta - 2cos4\theta - cos2\theta + 2$

(25 markah/*marks*)

(b) Dalam aliran bendalir, fungsi potensi kompleks $w = f(z)$ diberikan oleh $w = \emptyset(x,y) + j\varphi(x,y)$. Tunjukkan yang fungsi potensi halaju $\emptyset(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ adalah harmonik. Kemudian, dengan menggunakan kaedah Milne Thompson, dapatkan fungsi aliran $\varphi(x,y)$, di beri $ln\ z = ln|z| + jArg(z)$.

In fluid flow, the complex potential function $w = f(z)$ *is given by* $w = \emptyset(x,y) + j\varphi(x,y)$, *Show that the velocity potential function* $\emptyset(x,y) = ln\sqrt{x^2+y^2}$ *is harmonic. Then, using the Milne Thompson method, find the stream function* $\varphi(x,y)$ *given that* $ln\ z = ln|z| + jArg(z)$

(40 markah/*marks*)

(c) Nilaikan

Evaluate

(i) $\oint_C \frac{5z}{(z^2-z-2)(z+4j)}\,dz \qquad C: |z-1| = 5$

(ii) $\oint_C \frac{4z}{(z-1)(z+2)^2}\,dz \qquad C: |z| = 3$

(35 markah/*marks*)

2. (a) Ungkapkan $Z = cosh\left(0.5 + j\frac{1}{4}\pi\right)$ dalam bentuk $x + jy$ dan $re^{j\theta}$.

Arus elektik dalam kabel adalah bersamaan dengan dengan bahagian nyata ungkapan $\mathrm{e}^{\mathrm{j}0.7}/\mathrm{Z}$. Dapatkan nilai arus elektirk. (berikan jawapan anda pada 3tp).

Express $Z = cosh\left(0.5 + j\frac{1}{4}\pi\right)$ *in the form* $x + jy$ *and* $re^{j\theta}$.

The current in a cable is equal to the real part of the expression $e^{j0.7}/Z$. *Calculate the value of the current (leave your answer to 3dp).*

(20 markah/*marks*)

(b) Lokus z yang diberikan oleh $|z - z_0| = r$ dipetakan pada suatu lengkung oleh persamaan $u^2 + v^2 + 2u - 2\sqrt{3}v = 0$ di bawah pemetaan $w = (j + \sqrt{3})z + j\sqrt{3} - 1$. Tentukan z_0 dan r.

The locus of z *given by* $|z - z_0| = r$ *is mapped on a curve with equation* $u^2 + v^2 + 2u - 2\sqrt{3}v = 0$ *under the mapping* $= (j + \sqrt{3})z + j\sqrt{3} - 1$. *Determine* z_0 *and* r.

(40 markah/*marks*)

(c) Untuk fungsi $\mathrm{f(z)}$ yang diberi, nilaikan baki pada semua kutub. Seterusnya, nilaikan kamiran $\oint_{\mathrm{C}} \mathrm{f(z)dz}$.

For the given the function $f(z)$, *calculate the residues at all the poles. Hence, calculate the integral* $\oint_C f(z)dz$

(i) $\mathrm{f(z)} = \frac{3\mathrm{z}^2+2}{(\mathrm{z}-1)(\mathrm{z}^2+4)}$ dengan $C: |\mathrm{z}| = \frac{5}{2}$

$\mathrm{f(z)} = \frac{3\mathrm{z}^2+2}{(\mathrm{z}-1)(\mathrm{z}^2+4)}$ *where* $C: |z| = \frac{5}{2}$

(ii) $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ dengan $C: |\mathrm{z} - \mathrm{j}| = 2$

$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^2}$ *where* $C: |z - j| = 2$

(40 markah/*marks*)

3. (a) Tunjukkan bahawa fungsi $f(z) = Re\,(z)$ adalah selanjar. Seterusnya, bincangkan pembezaan fungsi tersebut.

Show that the function $f(z) = Re\,(z)$ *is continuous. Then, discuss the differentiability of the function.*

(25 markah/*marks*)

(b) Kenalpasti dan lakarkan lokus untuk titik z di atas satah kompleks yang memenuhi persamaan $Re\left(\frac{z+j}{z-j}\right) = 1$.

Identify and sketch the locus of the point z *on a complex plane which satisfies the equation* $Re\left(\frac{z+j}{z-j}\right) = 1$.

(30 markah/*marks*)

(c) Nilaikan $\oint_C 4\mathrm{z} - 1\,\mathrm{dz}$ sepanjang lengkung C diberi

Evaluate $\oint_C 4\mathrm{z} - 1\,\mathrm{dz}$ *along the contour* C *given*

(i) C_1 adalah bulatan $|z| = 1$ dari titik $(0, -1)$ ke $(1,0)$

C_1 *is the circle* $|z| = 1$ *from the point* $(0, -1)$ to $(1,0)$

(ii) C_2 adalah garis lurus dari dari titik $(0, -1)$ ke $(1,0)$

C_2 *is a straight line from from the point* $(0, -1)$ to $(1,0)$

Dari jawapan di bahagian (i) dan (ii), bincangkan prinsip kebebasan laluan.

From your results in part (i) and (ii), discuss the principal of independence of path.

(45 markah/*marks*)

4. (a) Dapatkan imej jalur terhingga $\frac{1}{9} < y < \frac{1}{2}$ di bawah transformasi $w = \frac{1}{z}$. Gambarkan transformasi tersebut dan tunjukan kawasan tersebut secara grafik untuk kedua-dua $\mathrm{satah} - \mathrm{z}$ dan $\mathrm{satah} - \mathrm{w}$.

Find the image of the infinite strip $\frac{1}{9} < y < \frac{1}{2}$ *under the transformation* $w = \frac{1}{z}$. *Describe the transformation and show the regions graphically for both the* $z - plane$ *and the* $w - plane$.

(30 markah/*marks*)

(b) Kembangkan fungsi $\frac{1}{\mathrm{z}^2 - 3\mathrm{z} + 2}$ dalam siri Laurent untuk

Expand the function $\frac{1}{\mathrm{z}^2 - 3\mathrm{z} + 2}$ *in Laurent series for*

(i) $1 < |z| < 2$

(ii) $|z| > 2$

(35 markah/*marks*)

(c) Menggunakan teorem kamiran Cauchy, nilaikan yang berikut:
Using Cauchy's integral theorem, evaluate the following:

(i) $\oint_C \frac{dz}{z^2+9}$; $C: |z-3j| = 4$

(ii) $\oint_C \frac{e^{2jz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-j)^3} dz$; $C: |z| = 6$

(35 markah/*marks*)

5. (a) Dapatkan semua penyelesaian untuk
Find all the solutions of

(i) $\cosh z = \frac{1}{2}$

(ii) $e^{2z-1} = 1 + j$

(30 markah/*marks*)

(b) Tunjukkan bahawa fungsi $u(r,\theta) = e^{-\theta} cos\,(ln\,r)$ mempunyai trajektori ortogon. Seterusnya, tentukannya.

Show that the function $u(r,\theta) = e^{-\theta} cos\,(ln\,r)$ has orthogonal trajectories. Hence determine them.

(30 markah/*marks*)

(c) Tentukan siri Taylor untuk fungsi $f(z)$ berikut pada titik yang dinyatakan. Juga, tentukan jejari penumpuan

Determine the Taylor series for the following $f(z)$ about the indicated point. Also, determine the radius of convergence.

(i) $f(z) = \frac{1}{z(z-4j)}$ *pada* $z_0 = 2j$

$f(z) = \frac{1}{z(z-4j)}$ *about* $z_0 = 2j$

(ii) $f(z) = ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ pada z_0=0

$f(z) = ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ *about* z_0=0

(40 markah/*marks*)

oooOooo

LAMPIRAN

APPENDIX

$$cosh^2 z - sinh^2 z = 1$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh\ \mathrm{j}\, z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = \cos z$$

$$\sinh\ \mathrm{j}\, z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2} = j \sin z$$

$$\tanh jz = \mathrm{j} \tan z$$

$$j \sinh z = \sin (jz)$$

Maclaurin's series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ z^n$$

Taylor's series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\ (z - z_0)^n$$

Residue of $f(z)$ at z_0

$$\mathrm{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\ (z - z_0)^m\ f(z)\right]$$

Residue Theorem

$$\oint_C\ f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\, f(z)$$