UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination

2012/2013 Academic Session

January 2013

EEE 232 – COMPLEX ANALYSIS

[ANALISIS KOMPLEKS]

Duration : 3 hours

[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of <u>EIGHT</u> (8) pages printed material and <u>TWO</u> (2) pages of Appendices before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi <u>LAPAN</u> (8) mukasurat bercetak beserta <u>DUA</u> (2) mukasurat lampiran bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

<u>Instructions:</u> This question paper consists <u>SIX</u> (6) questions. Answer **FIVE** (5) questions. All questions carry the same marks.

[***<u>Arahan:</u>*** *Kertas soalan ini mengandungi <u>ENAM</u> (6) soalan. Jawab **LIMA** (5) soalan. Semua soalan membawa jumlah markah yang sama.]*

Answer to any question must start on a new page.

[Mulakan jawapan anda untuk setiap soalan pada muka surat yang baru]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah digunapakai.]

…2/-

1. (a) Guna Rumus De Moivre's bersama rumus Binomial untuk mendapatkan identiti $\cos 3\theta$ dan dalam bentuk kuasa $\cos \theta$

Use De Moivre's formula together with binomial formula to derive the identities $\cos 3\theta$ *in terms of powers of* $\cos \theta$

(4 markah/*marks*)

(b) Tentukan lokasi dan peringkat kesifaran bagi fungsi $f(z) = 1 - \cos z$.

Determine the location and order of the zeros of the function $f(z) = 1 - \cos z$.

(4 markah/*marks*)

(c) Dalam medan elektrostatik, fungsi upaya komplek $w = f(z)$ diberikan oleh $w = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$. Tunjukkan bahawa fungsi daya $\phi(x, y) = x^3y - xy^3$ adalah fungsi harmonik. Dapatkan fungsi fluks $\psi(x, y)$ dan nyatakan fungsi daya komplek w sebagai fungsi terhadap z.

In electrostatic field, the complex potential function $w = f(z)$ is given by $w = \phi(x, y) + j\psi(x, y)$. Show that the potential function $\phi(x, y) = x^3y - xy^3$ is a harmonic function. Find the flux function $\psi(x, y)$ and express the complex potential function w as a function of z.

(12 markah/*marks*)

2. (a) Dalam permasalahan Drichlet, suatu fungsi $\emptyset(x, y)$ adalah harmonic pada setiap titik (x, y) pada satah setengah atas z dan mengambil nilai $F(x)$*pada paksi nyata. Fungsi* $\emptyset(x, y)$ *diberi oleh* $\emptyset(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(w)dw}{y^2+(x-w)^2}$. .

In a Drichlet problem, a function $\emptyset(x, y)$ is harmonic at each point (x, y)in the upper half of the $z - plane$ *and takes a given value* $F(x)$*on the real axis. The function* $\emptyset(x, y)$ *is given by* $\emptyset(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(w)dw}{y^2+(x-w)^2}$.

Dapatkan $\emptyset(x, y)$ *diberi*

Find $\emptyset(x, y)$ *given that*

$$F(w) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 < x < 1 \\ -1, & x > 1 \end{cases}$$

(7 markah/*marks*)

(b) Tentukan samada fungsi $f(z) = Re(z)$ boleh dibezakan.

Determine whether the function $f(z) = Re(z)$ *is differentiable.*

(5 markah/*marks*)

(c) Dapatkan nilai untuk

Find the values of

(i) $\sin z = 0$

(ii) $\tan(\frac{\pi}{4} - j3)$

(8 markah/*marks*)

3. Lengkung sama upaya di beri oleh garis $x = k$ dan $y = k$. (k adalah intiger) Lukis kedua-dua garis pada $satah - z$ yang sama. Seterusnya, dapatkan imej garis tersebut dibawah pemetaan $w = z^2$. Tunjukkan kedua imej pada $satah - w$ yang sama.

The equipotential curves are given by the line $x = k$ and $y = k$. (k is an intiger)*Draw both lines on the same $z - plane$. Then find the image of these curves under the mapping $w = z^2$. Illustrate the images on the same $w - plane$.*

(10 markah/*marks*)

(b) Nilaikan kamiran berikut dalam lengkung yang diberi

Evaluate the following integral in the given contour.

(i) $\oint_c \frac{\cos 2z}{6z-\pi}$

dimana C adalah sebarang lengkuk mudah tertutup merangkumi bulatan $|z| = 3$.

Where C is any simple closed curve enclosing the circle $|z| = 3$.

(ii) $\oint_c \frac{e^z}{(z^2-4)(z-1)^2}$

dimana C adalah satu segiempat sama dengan buju pada $\pm 3 \pm j$.

Where C is a square with vertices at $\pm 3 \pm j$.

(10 markah/*marks*)

4. (a) Terangkan lokus z apabila

Describe the locus z when

$$\left|\frac{z+j}{z-j}\right| = 2$$

(5 markah/*marks*)

(b) Dapatkan kembangan Taylor untuk fungsi $f(x) = \frac{1}{3-z}$ dengan titik tengah $z_0 = 2j$. Kemudian, tentukan bulatan penumpuan.

Find the Taylor expansion of $f(x) = \frac{1}{3-z}$ *with center* $z_0 = 2j$*. Then, determine the circle of convergence.*

(5 markah/*marks*)

(c) Nilaikan $\oint(\bar{z})^2 dz$ sepanjang lengkung yang diberi.

Evaluate $\oint(\bar{z})^2 dz$ *along the given curve*

(i) C_1: dari (0,0) ke (2,0) dan sepanjang paksi nyata kemudian dari (2,0) ke (2,1) secara menegak.

C_1 *: from (0,0) to (2,0) along the real axis and then from (2,0) to (2,1) vertically.*

(ii) C_2: garisan lurus dari $z = 0$ ke $z = 2 + j$

C_2 *: a straight line segment from* $z = 0$ *to* $z = 2 + j$

Apakah yang boleh anda simpulkan mengenai fungsi $f(z)$ dari jawapan dibahagian (i) dan bahagian (ii) diatas.

What can you deduce about the function $f(z)$ from the answers in part (i) and part (ii) above.

(10 markah/*marks*)

5. (a) Satu rantau dalam satah- z mempunyai sempadan C iaitu satu sukuan bagi satu bulatan $|z| = 2$ dari $z = 2$ ke $z = 2j$.

A region in the z -plane has a boundary C which is a quadrant of a circle $|z| = 2$ for $z = 2$ to $z = 2j$.

Nilaikan
Evaluate

$$\int_C z^2 + 1\, dz$$

(5 markah/*marks*)

(b) Dapatkan trajektori ortogon suatu keluarga lengkuk $r^3 \sin 3\theta = c$ (satu pemalar).
Find the orthogonal trajectories of the family of curve $r^3 \sin 3\theta = c$ (a constant).

(5 markah/*marks*)

(c) Dengan menggunakan teorem baki, nilaikan yang berikut

Using residue theorem, evaluate the following

(i) $\int_C \frac{z^2+1}{(z^2-1)} dz$, C : $|z| = 2$

(ii) $\int_C \frac{\tan z}{z} dz$, C : $|z - 1| = 2$

(10 markah/*marks*)

6. (a) Kembangkan fungsi $f(z)$ berikut dalam siri Laurent yang sah untuk domain yang diberi:

Expand the following $f(z)$ function in a Laurent series valid for the given domain or point

.

(i) $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$

dengan domain annulus $1 < |z| < 2$

with annulus domain $1 < |z| < 2$

(ii) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$

pada $z = j$

at $z = j$

(8 markah/*marks*)

(b) Tentukan imej pada satah w untuk ungkapan pada satah z pada pemetaan yang dinyatakan. Gambarkan rantau pada kedua-dua satah.

Determine the image in the w plane of the given expression in the z plane under the indicated mapping. Illustrate the region in both planes.

(i) Suatu rantau di dalam segitiga dengan bucu $[0,0]$, $[-1,0]$ dan $[0,1]$ dibawah pemetaan $w = (1-j)z + 3$.

A region in a triangle with vertices $(0,0)$, $(-1,0)$ *and* $(0,1)$ *under the mapping* $w = (1-j)z + 3$.

(ii) Satu rantau di dalam bulatan $|z|=2$ bawah pemetaan $w = \frac{z+j}{z-j}$

A region in a circle $|z|=2$ *under the transformation* $w = \frac{z+j}{z-j}$

(12 markah/*marks*)

oooooOoooo

APPENDIX

$cosh^2 x - sinh^2 x = 1$

$cosh^2 x - cosh^2 x + sinh^2 x$

$sinh^2 x = 2 \sinh \quad x \cosh \quad x$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-2}}{2}$

$\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\cosh \ \mathrm{j} x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = \cos x$

$\sinh \ \mathrm{j} x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} = j \sin \quad x$

$j \tanh x = \tan j \ x$

LAMPIRAN

APPENDIX

Maclaurin's series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \; z^n$$

Taylor's series

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\alpha} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \; (z - z_0)^n$$

Residue of $f(z)$ at z_0

$$\text{Res}\,[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \; (z - z_0)^m \; f(z)\right]$$

Residue Theorem

$$\oint_C \; f(z)dz = 2\pi j \sum_{k=1}^{n} \text{Res}\, f(z)$$