UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1992/93

April 1993

EUM 221 - Kebarangkalian dan Statistik Gunaan

Masa: [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7- muka surat bercetak dan LIMA (5) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab EMPAT soalan sahaja, di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan adalah seperti di dalam kurungan (.....).

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

1. (a) Katakan X_1 dan X_2 ialah dua pembolehubah rawak diskrit dengan fungsi kebarangkalian tercantum $p(x_1,x_2)$.

$$\text{Jika } p(x_1,x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-\lambda} \frac{e\lambda}{x_2!}, \quad x_1 = 0,1,2\ldots\ldots,x_2 \quad ,$$

$$x_2 = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots \quad x_2 \geq x_1, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad \lambda > 0$$

(i) Carilah fungsi taburan sut bagi X_1 dan X_2.

(ii) Adakah X_1 dan X_2 bebas.

(iii) Tunjukkan bahawa taburan bersyarat X_1 di beri X_2 ialah,

$$p(x_1|x_2) = \binom{x_2}{x_1} p^{x_1}(1-p)^{x_2-x_1}, \quad x_1 = 0,1,\ldots,x_2$$

(40%)

(b) Tempuh hayat sebuah komputer peribadi adalah bergantung kepada masa hayat dua komponen. Katakan X ialah pembolehubah rawak masa hayat komponen I dan Y ialah pembolehubah rawak masa hayat komponen II. Fungsi kebarangkalian tercantum bagi X dan Y diberi oleh,

$$f(x,y) = \begin{cases} x\exp\,(-x(1+y)), & x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0. \\ 0 & , \text{lai n} - \text{lai n} \end{cases}$$

(a) Carilah $P(X \geq 0$ dan $Y \geq 3)$?

(b) Carilah taburan sut bagi X dan Y. Adakah X dan Y itu bebas? Terangkan.

(c) Jika diberi $X = x$, carilah $P(Y|X = x)$ dan seterusnya carilah $P(0 \leq y \leq 5|x = 3)$?

(d) Carilah min dan varians bagi X.

(60%)

2. (a) Katakan $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots X_n$ ialah sampel rawak bersaiz n yang mana setiap satunya tertabur normal dengan min μ dan varians σ^2. Dengan menggunakan kaedah kebolehjadian maksimum, dapatkan anggaran bagi μ dan σ^2. Jika n sangat besar, tunjukkan bahawa μ dan σ^2 itu adalah panganggar-penganggar yang tidak pincang.

[nota: Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi pebolehubah rawak X yang tertabur normal dengan min μ dan varians σ^2 diberi oleh;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \quad].$$

(50%)

(b) Kekuatan mampat konkrit sedang diuji oleh seorang Jurutera Awam. 10 ujian yang telah dibuat menghasilkan data berikut:

392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375

(i) Dengan menganggapkan bahawa setiap ujian itu adalah bebas dan tertabur secara normal, dapatkan anggaran bagi min dan sisihan piawai bagi kekuatan mampat konkrit itu. Gunakan kebolehjadian maksimum untuk menentukan anggaran tersebut.

(ii) Tentukan 95% selang keyakinan bagi min kekuatan mampat konkrit itu. Apakah kesimpulan anda mengenai ujian tersebut?.

(30%)

(c) Voltan keluaran dari dua jenis pengubah (transformer) diuji siasat dan dianggap tertabur secara normal. 10 buah pengubah bagi setiap jenis dipilih secara rawak dan voltan keluarannya diukur. Min sampel dikira bagi setiap jenis pengubah dan nilainya ialah 12.13 bagi jenis 1 dan 12.05 bagi jenis 2. Diketahui juga bahawa varians voltan keluaran bagi kedua-dua jenis pengubah itu masing-masingnya ialah 0.7 dan 0.8 . Dari maklumat yang diberi ini, binalah 95% selang keyakinan dua hala bagi perbezaan dua min voltan itu.

(20%)

3. (a) Berikut ialah data bagi tempoh (dalam minggu) seseorang itu dijangka akan hidup apabila mengidap penyakit barah. Data tersebut berdasarkan kepada dua jenis barah, barah otak dan barah pari-paru.

Barah Otak		Barah Paru-Paru	
63	82	64	56
81	68	72	63
57	59	83	74
66	75	59	82
82	73	65	82

(i) Ujilah hipothesis yang menyatakan bahawa varians bagi kedua-dua jenis barah itu adalah sama pada paras keertian $\alpha = 0.05$ melawan hipotesis alternatif bahawa kedua-dua varians itu tidak sama.

(ii) Menggunakan keputusan di atas, ujilah hipotesis yang menyatakan bahawa min bagi kedua-dua jenis barah tersebut adalah sama pada paras keertian $\alpha = 0.05$ melawan hipotesis alternatif bahawa kedua-dua min itu tidak sama. Berikan pendapat anda mengenai keputusan yang perolehi itu.

(60%)

b. Penjualan bulanan kereta Proton Saga yang dijual pada tahun 1992 (Y) adalah bergantung kepada penjualan bulanan pada tahun 1990 (X_1) dan tahun 1991 (X_2). Data-data yang diperolehi adalah seperti berikut:

Y	X_1	X_2
240	25	100
236	31	95
290	45	110
274	60	88
301	65	94
316	72	99
300	80	97
296	84	96
267	75	110
276	60	105
288	50	100
261	38	98

Dapatkan model linear regresi berganda,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \in$$

bagi data di atas.

β_0, β_1 dan β_2 ialah pekali – pekali regresi dan $\in$ ialah ralat dengan min 0 dan varians σ^2.

(40%)

4. (a) Berikan takrif Rantai Markov bagi suatu proses stokastik yang mempunyai keadaan diskrit dan masa diskrit.

Jika $p_j^{(t)}$ ialah kebarangkalian rantai dalam keadaan j pada masa t, dan $p^{(t)}$ ialah taburan kebarangkalian keadaan yang dihuni pada masa t.

Tunjukkan bahawa,

(i) $p^{(t+1)} = p^{(t)}\underline{P}$ untuk semua $t \geq 0$

(ii) $p^{(t)} = p^{(0)}\underline{P}^t$

(30%)

(b) Rantai Markov mempunyai tiga keadaan dengan matriks peralihan,

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

Jika taburan awal, $P^{(o)} = (0.4,\ 0.3,\ 0.3)$, dapatkan taburan kebarangkalian keadaan yang dihuni pada masa $t = 4$. Carilah juga taburan keseimbangan bagi rantai Markov ini. Berikan pendapat anda mengenai rantai Markov ini.

(30%)

(c) Pada suatu tempat yang tertentu, data keadaan cuaca di analisa. Rantai Markov digunakan sebagai model untuk menggambarkan pertukaran keadaan cuaca seperti berikut:

$x_d = 0$ bagi cuaca cerah dan

$x_d = 1$ bagi hari hujan (cuaca mendung)

Sekarang ini musim hujan. Bagi setiap hari, d = 0, 1, 2,........, kebarangkalian keadaan cuaca bertukar dari keadaan hujan ke keadaan cuaca cerah dalam satu hari itu ialah 0.3. Manakala kebarangkalian keadaan cuaca beralih dari keadaan cuaca cerah ke keadaan hujan dalam satu hari itu ialah 0.1.

(i) Tentukan matriks peralihan , $\underline{P}$ bagi rantai Markov di atas.

(ii) Di beri suatu hari tertentu (taburan awalnya), 70% cuaca akan bertukar dari keadaan hujan ke keadaan cerah dan 30% cuaca akan bertukar dari keadaan cerah ke keadaan hujan. Dapatkan kebarangkalian yang keadaan cuaca akan menjadi cerah dalam masa lima hari akan datang.

(iii) Dapatkan juga taburan keseimbangan bagi rantai Markov tersebut.

(40%)

5. (a) Model ANOVA satu hala diberi sebagai,

$$X_{ij} = \mu + \rho_i + \varepsilon_{ij} \quad , \quad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,a$$
$$j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

dan $\varepsilon_{ij} \sim N(o,\sigma^2)$

Dengan menggunakan kaedah kuasa dua terkecil dan beranggapan bahawa $\sum_i \rho_i = 0$, dapatkan penganggar bagi parameter μ dan ρ sup aya

jumlah kuasadua ralat, $\sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2$ min imum

(30%)

(b) Jurutera Bahan ingin menentukan samada perbezaan paras suhu akan memberi kesan terhadap ketumpatan suatu jenis bata. Data dari ujikaji yang dijalankan adalah seperti berikut:

Suhu (F)	Ketumpatan			
100	14.3	14.1	15.0	14.6
125	15.2	14.9	13.7	14.3
150	13.4	13.3	13.2	12.7
175	12.9	12.7	13.2	12.9
200	14.7	14.8	14.4	14.2

(i) Lakukan analisis varians bagi data di atas.

(ii) Adakah perbezaan paras suhu itu memberi kesan yang bererti terhadap ketumpatan bata?. Gunakan $\alpha = 0.05$.

(iii) Anggarkan purata keseluruhan ketumpatan bata itu dan kesan suhunya.

(iv) Berikan pendapat anda mengenai keputusan analisa di atas.

(70%)

-ooo0ooo-