UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua

Sidang Akademik 1991/92

Mac/April 1992

EUM 202 - Matematik Kejuruteraan IV

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON :

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 muka surat tercetak dan EMPAT(4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia.

SOALAN 1

(a) Biar A jadi satu matriks yang diberi oleh

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Selesaikan sistem persamaan homogen

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[30%]

(ii) Jikalau sistem persamaan tak homogen yang diberi oleh

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

adalah konsisten (consistent), tentukan nilai a, b dan c. Bagi nilai a, b dan c yang anda tentukan itu, selesaikan sistem tak homogen ini.

[30%]

(b) Tanpa menghiraukan tentang nilai yang a,b,c dan d mungkin boleh ambil, gunakan operasi baris untuk mengurangkan matriks

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$$

menjadi satu matriks segi-tiga atas (upper triangular matrix). Kemudian tentukan nilai penentu matriks A.

Nyatakan syarat ke atas a,b,c dan d yang diperlu untuk A^{-1} wujud.

(Nota: Matriks $A = [a_{ij}]$ dikatakan matriks segi – tiga atas jikalau

$a_{ij} = 0$ bagi $i > j$. Perhatikan bahawa

$x^3 - y^3 = (x - y)\,[x^2 + xy + y^2]$)

[40%]

SOALAN 2

Pertimbangkan matriks simetri

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[a] Jikalau matriks A mempunyai nilai eigen 0 dan 3, tentukan a dan b . Dapatkan nilai eigen lain yang A ada.

[30%]

[b] Bagi nilai a dan b yang anda dapati dalam bahagian (a) di atas, cari vektor eigen bagi A yang berhubung dengan setiap nilai eigen A.

[30%]

[c] Gunakan jawapan anda dalam bahagian [b] di atas untuk membina satu matriks P (saiz 3 x 3) yang mempunyai sifat

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i (i = 1,2,3)$ ialah nilaieigen bagi A. Cari P^{-1}. Kira A^8.

[20%]

[d] Terangkan bagaimana anda boleh memilih sesuatu transformasi linear yang boleh menukarkan persamaan

$ax_1^2 + bx_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = 0$

(a dan b seperti terdapat dalam bahagian (a))

menjadi satu persamaan dalam bentuk

$\alpha u_1^2 + \beta u_2^2 + \gamma u_3^2 = 0$

(Apakah nilai α, β dan γ?)

[20%]

SOALAN 3

Dalam koordinat polar (r,θ) (dengan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$), persamaan haba dua dimensi mantap ialah

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad ;$$

$T = T(r,\theta)$ ialah suhu

(a) Jikalau persamaan haba di atas mempunyai penyelesaian dalam bentuk

$$T(r,\theta) = R(r)\,\Phi(\theta)$$

tunjukkan bahawa satu ungkapan yang sesuai untuk $R(r)$ dan $\Phi(\theta)$ ialah

$$R(r) = R_n(r) = A_n r^{n\pi/L} + B_n r^{-n\pi/L},$$

$$\Phi(\theta) = \Phi_n(\theta) = C_n \cos(n\pi\theta/L) + D_n \sin(n\pi\theta/L) \quad ;$$

A_n, B_n, C_n dan D_n ialah pemalar sebarangan dan L ialah pemalar yang akan ditentukan dalam bahagian (b) di bawah.

[30%]

(b) Dari pertimbangan fizikal, fungsi $\Phi = \Phi(\theta)$ dalam bahagian (a) di atas diketahui sebagai satu fungsi yang berkala. Jikalau $T > 0$ ialah kala untuk $\Phi(\theta)$, apakah nilai minimum yang T boleh ambil? Seterusnya tentukan nilai L dalam bahagian (a) di atas jikalau n ialah integer.

[30%]

(c) Pertimbangkan sekarang masalah menyelesaikan persamaan haba di atas dalam rantau bulatan $x^2 + y^2 \leq a^2$, a > 0 ialah satu pemalar yang diberi. Andaikan bahawa masalah mempunyai penyelesaian dalam bentuk

$T(r,\theta) = R_n(r)\,\Phi_n(\theta)$, n = 0, 1, 2, ...;

$R_n(r)$ dan $\Phi_n(\theta)$ adalah diberi dalam bahagian (a)

(i) Suhu $T(r,\theta)$ hanya boleh mengambil nilai terhingga dalam rantau bulatan $x^2 + y^2 \leq a^2$. Dari maklumat ini, apakah nilai pemalar B_n? (B_n ialah pemalar dalam fungsi $R_n(r)$.)

[10%]

(ii) Jikalau suhu pada sempadan rantau bulatan, iaitu pada r = a mempunyai nilai To , (To ialah satu pemalar yang diberi), tentukan penyelesaian bagi masalah yang dipertimbangkan dalam bentuk siri .

(Petunjuk: Jikalau bagi -L < x < L

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{a_n \cos(n\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L)\right\}$$

maka $$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\pi x/L)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx.)$$

[30%]

SOALAN 4.

(a) Jelmaan Fourier kosinus untuk $f(x)$ $(x \geq 0)$ ditakrifkan oleh

$$F_c\{f(x); w\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(wx)\, dx$$

Tunjukkan bahawa

$$F_c\left\{\frac{b}{b^2 + (a-x)^2} + \frac{b}{b^2 + (a+x)^2} \quad ; \quad w\right\}$$

$$= \sqrt{2\pi} \cos(aw) \exp(-bw) \quad ;$$

a dan b ialah pemalar nyata dan $b > 0$.

(Petunjuk: Anda boleh guna keputusan:

$$F_c\{f(x); w\} = G(w) \Leftrightarrow F_c\{G(w); x\} = f(x)$$

$$\int_0^\infty \cos(wt) \exp(-st)\, dt = s(s^2 + w^2)^{-1} \quad , \qquad s > 0)$$

[30%]

(b) Pertimbangkan persamaan pembezaan separa (P.P.S.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad u = u(x, y)$$

(i) Jikalau P.P.S. mempunyai penyelesaian dalam bentuk $u = F(Z)$ di mana $Z = px + y$ dan $F(Z)$ boleh dibezakan terhadap Z sebanyak dua kali, tentukan nilai pemalar yang p yang mempunyai bahagian khayalan yang positif.

[30%]

(ii) Bagi nilai p yang anda tentukan dalam bahagian (i) di atas, biar

$$F(Z) = \int_0^\infty [A(k) \exp(ikZ) + B(k) \exp(-ikZ)]\,dk \quad ;$$

A(k) dan B(k) ialah fungsi sebarangan yang nyata.

Jikalau kita ingin menyelesaikan P.P.S. di atas dalam ruang separuh $x \leq 0$ dan diberitahu bahawa $|u(x,y)| \to 0$ apabila $x^2 + y^2 \to \infty$ serta bahawa

$$u(0,y) = (2 - 2y + y^2)^{-1} + (2 + 2y + y^2)^{-1} \quad \text{bagi } -\infty < y < \infty,$$

tentukan A(k) dan B(k).

(Petunjuk: Anda boleh guna keputusan dalam bahagian (a) di atas. Ambil $u(x,y) = \mathrm{Re}\,\{F(Z)\}$.)

[40%]

-ooo0ooo-