UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1988/89

Mac/April 1989

EUM 202 Matematik Kejuruteraan IV

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas ini mempunyai 8 muka surat berserta lampiran (1 muka surat) yang bercetak.

Kesemuanya terdapat 5 soalan. Jawab Semua soalan.

Soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia.

Markah bagi setiap soalan adalah 100. Pecahan markah bagi bahagian-bahagian soalan ditunjukkan di dalam kurungan (......).

Mesin hitung boleh digunakan. Proses kiraan mesti ditunjukkan dengan jelas.

Buku Sifir Matematik disediakan.

1. Jelmaan Laplace bagi fungsi f(t), t ≥ 0 , adalah (jika ia wujud),

$$F(s) = \mathcal{L}\{ f(t) \} = \int_0^{\infty} e^{-st} \ f(t)\ dt$$

(a) Jika f(t) mempunyai kalaan T, iaitu

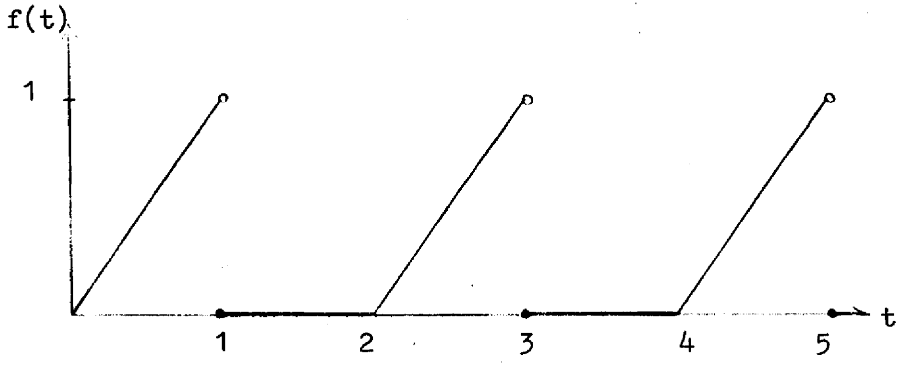
$$f(t+T) = f(t)$$

maka tunjukkan bahawa

$$\mathcal{L}\{ f(t) \} = \frac{1}{1-\ e^{-sT}} \int_0^{T} e^{-st} f(t)\ dt$$

(20%)

(b) Fungsi f(t) adalah seperti di dalam rajah di bawah.



Apakah $\mathcal{L}\{ f(t) \}$?

(30%)

(c) Diberi bahawa

$$\delta_a(t - t_o) = \begin{cases} 1/2a & t_o - a < t < t_o + a \\ 0 & t \text{ selainnya} \end{cases}$$

dan $\delta(t - t_o) = \lim\limits_{a \to 0} \delta_a(t - t_o)$, maka cari $\mathcal{L}\{\delta(t)\}$

(20%)

(d) Selesaikan masalah nilai awal berikut:-

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t} \qquad y(0) = 2, \; y'(0) = 6$$

(30%)

2. Jika $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dan $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ merupakan jelmaan-jelmaan Laplace, maka teorem konvolusi menyatakan

$$F(s).\,G(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\right\}$$

(a) Tunjukkan bahawa

$$F(s).\,G(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du\right\}$$

(10%)

(b) Dengan menggunakan teorem konvolusi cari

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\}$$

(45%)

(c) Dengan menggunakan teorem konvolusi tunjukkan bahawa

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}F(s)$$

(10%)

(d) Bagi persamaan kamilan di bawah selesaikan untuk f(t):

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(u)e^{t-u}\,du$$

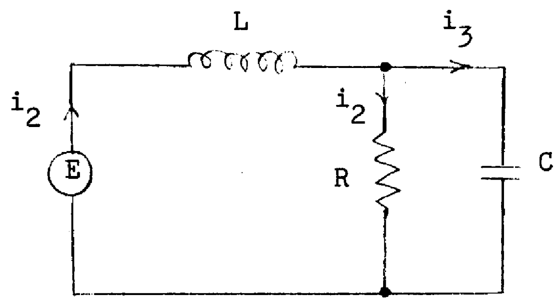
(35%)

3. (a) Cari nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen bagi matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

(30%)

(b) Litar di bawah dapat diperihalkan oleh :



$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t)$$

$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0$$

Selesaikan untuk $i_1(t)$ dan $i_2(t)$ jika E = 60 volts, L = 1 henry, R = 50 ohms, C = 10^{-4} farads, dan $i_1(0) = i_2(0) = 0$.
Apakah $i_3(t)$? Apakah nilai-nilai mantap bagi i_1, i_2 dan i_3?

(50%)

(c) Eksponen bagi matriks A (n x n) adalah

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

yang mana I adalah matriks identiti (n x n). Adakah $e^A e^B = e^{A+B}$ benar? Kenapa?

(20%)

4. (a) Jelmaan Fourier selanjar bagi fungsi g(t) adalah, jika ia wujud,

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega t} dt, \qquad j = \sqrt{-1}\,,\ \omega = 2\pi f$$

yang mana f adalah frekuensi.

(i) Jika isyarat adalah berbentuk satu denyut yang ditakrifkan sebagai

$$g(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T_0/2 \\ 0 & t \text{ selainnya} \end{cases}$$

dapatkan $G(2\pi f)$. Lakarkan $g(t)$ dan $h(f) = G(2\pi f)$.

$$[\, \sin x = (e^{jx} - e^{-jx}) / 2j \,]$$

(35%)

(ii) Tunjukkan bahawa jelmaan Fourier bagi $g(t - u)$ adalah $e^{-j\omega u}\, G(\omega)$.

(10%)

(iii) Diberi bahawa jelmaan Fourier bagi $f(t)$ adalah $F(\omega)$ dan jelmaan Fourier bagi $g(t)$ adalah $G(\omega)$. Tunjukkan bahawa jelmaan Fourier bagi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(t-u)\, du$$

adalah $F(\omega) \,.\, G(\omega)$

(15%)

(b) Jelmaan-z pula ditakrifkan bagi satu isyarat $x(t)$, sebagai (jika ia wujud)

$$X(z) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(t) z^{-t}$$

Satu isyarat diskrit diperihalkan oleh

$$x(t) = H(t-1)\alpha^t$$

yang mana H(t) adalah fungsi Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Cari jelmaan-z bagi x(t).

(15%)

(c) Selesaikan sistem berikut dengan menggunakan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen.

$$\frac{dx_1}{dt} = 2x_1 + 3x_2 \qquad \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2$$

$$x_1(0) = 1, \; x_2(0) = 0$$

(25%)

5. (a) Halaju sebuah kapalselam di bawah lapisan air batu di kutub utara diberikan di dalam jadual di bawah. Guna petua trapezoid untuk mencari jarak yang dilalui di dalam selang masa [0 , t], iaitu nilai-nilai bagi d_1 , d_2, . . . , d_8 .

Masa, t (Jam)	Halaju, v (km/jam)	Angaran Jarak yangDilalui Di Dalam Selang [0, t] (Kepada 4 Titik Perpuluhan)
0.00	6.0	0.0000
0.25	7.5	d_1
0.50	8.0	d_2
0.75	9.0	d_3
1.00	8.5	d_4
1.25	10.5	d_5
1.50	9.5	d_6
1.75	7.0	d_7
2.00	6.0	d_8

$$\left[\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] + h \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k)\right]$$

(40%)

(b) Guna kaedah Runge-Kutta dengan h = 0.1 untuk mendapat satu hampiran bagi y (1.2) dari

$$\frac{dy}{dx} = 2xy, \qquad y(1) = 1$$

$$\left[\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = hf(x_n + \frac{1}{2}h, \ y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = hf(x_n + h, \ y_n + k_3) \end{array}\right]$$

(50%)

(c) Apakah perbezaan di antara kaedah Euler dan kaedah Euler diperbaiki (Kaedah Heun) ?

(10%)

	$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$	$f(t)$
1	$1/s$	1
2	$1/s^2$	t
3	$1/s^n, \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
4	$1/\sqrt{s}$	$1/\sqrt{\pi t}$
5	$1/s^{3/2}$	$2\sqrt{t/\pi}$
6	$1/s^a \quad (a > 0)$	$t^{a-1}/\Gamma(a)$
7	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
8	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
9	$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (n = 1, 2, \cdots)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{at}$
10	$\dfrac{1}{(s-a)^k} \quad (k > 0)$	$\dfrac{1}{\Gamma(k)} t^{k-1}e^{at}$
11	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
12	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq b)$	$\dfrac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$
13	$\dfrac{1}{s^2 + \omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} \sin \omega t$
14	$\dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$
15	$\dfrac{1}{s^2 - a^2}$	$\dfrac{1}{a} \sinh at$
16	$\dfrac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
17	$\dfrac{1}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$\dfrac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
18	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$	$e^{at} \cos \omega t$
19	$\dfrac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$
20	$\dfrac{1}{s^2(s^2 + \omega^2)}$	$\dfrac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$
21	$\dfrac{1}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
22	$\dfrac{s}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{t}{2\omega} \sin \omega t$
23	$\dfrac{s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$	$\dfrac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
24	$\dfrac{s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)} \quad (a^2 \neq b^2)$	$\dfrac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$