UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1992/93

April 1993

EUM 202 - Matematik Kejuruteraan IV

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7 muka surat bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab EMPAT (4) soalan SAHAJA.

Mesin hitung boleh digunakan dan proses kiraan mestilah ditunjuk dengan jelas.

1. a. Dua vektor $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ ditakrifkan dalam ruang vektor seperti berikut:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan $\underline{y}$ terletak diantara titik awal a(−3, 1, −0.5, 5.75, 0.7) dan titik terminal b (-2, 1, 4.5, 2.75, -0.3).

(i) Kiralah $\|\underline{x}\|$ dan $\|\underline{y}\|$, seterusnya buktikan

$[\|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|]^2 = 9\,\underline{x} \cdot \underline{y}$

(10%)

(ii) Carilah sudut diantara $(\underline{x} + 2\underline{y})$ dan $(2.5\underline{x} - 1.5\underline{y})$

(15%)

b. Dua matriks yang ditakrifkan dalam ruang matriks seperti berikut:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

(i) Buktikan bahawa $\underline{A}\,\underline{A}^T$ dan $\underline{B}\,\underline{B}^T$ adalah matriks simetri. Seterusnya carilah nilai eigen bagi kedua-dua matriks tersebut.

(20%)

(ii) Terangkan bagaimana untuk mendapatkan penentu $\left|\underline{A}^2 - 3\underline{B}^2\right|$

(15%)

c. Menggunakan pemisahan pembolehubah carilah penyelesaian berikut:

(i) penyelesaian persamaan haba:

$$16\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u = u(x, y, t)$$

(20%)

(ii) penyelesaian persamaan kebezaan separa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad u = u(x, y)$$

Terangkan sifat-sifat bagi u dibawah bukan ayunan.

(20%)

2. a. Takrifkan pangkat bagi suatu matriks. Carilah pangkat bagi matriks yang berikut:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -10 \\ 4 & 3 & 2 & 8 & -6 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & -4 & 8 & -15 \\ 2 & 4 & 1 & 6 & -7 & 5 \\ 6 & 7 & 3 & 14 & -13 & 0 \end{bmatrix} , \quad \underline{B} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(10%)

b. Selesaikan sistem persamaan kebezaan yang berikut dengan menggunakan kaedah Cayley-Hamilton.

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(30%)

c. Carilah nilai eigen dan vektor eigen bagi matriks yang berikut:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ i & 7i & 0 \\ -3i & 2 & -4 \end{bmatrix} , \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(30%)

d. Jika w(x,y) = u(x) + v(y), carilah penyelesaian bagi u(x) dan v(x) dari persamaan kebezaan separa,

$$(x^2 - x)\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 2x + y$$

(30%)

3. a. Selesaikan sistem persamaan kebezaan yang berikut dengan menggunakan kaedah jelmaan Laplace:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_o = 0$$

(20%)

b. Selesaikan sistem linear berikut dengan menggunakan kaedah Gauss-Seidel,

$8x_1 + x_2 - x_3 = 8$, $\quad 2x_1 + x_2 + 9x_3 = 12$, $\quad x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 4$,
$\mathbf{x}_o = 0 \quad , \alpha = 1$

(30%)

c. Selesaikan persamaan kebezaan separa yang berikut dengan menggunakan pemisahan pembolehubah:

(i) persamaan resapan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad u(0,t) = 0 \text{ dan } u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 1$$

(25%)

(ii) $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 u = 0 \quad , \quad u(x,0) = u(0,y) = 1$$

(25%)

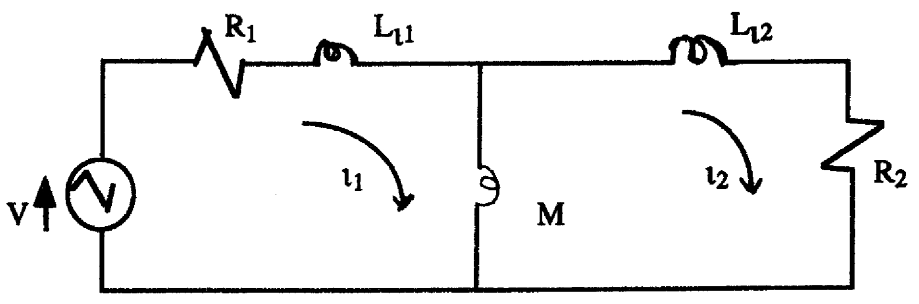
4. a. Diberi dua matriks dalam ruang matriks seperti berikut:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Terangkan bagaimana untuk mendapatkan $[\underline{B}\underline{A}^T\underline{A}\underline{B}]^{-1}$ dengan menggunakan penghapusan Gauss – Jordan.

(30%)

b. Dalam litar R - L di bawah, selesaikan arus i_1, i_2 menggunakan kaedah matriks peralihan. Tunjukkan bahawa matriks $[\underline{L}^{-1}\underline{R}]$ memberikan nilai eigen yang nyata. Carilah penyelesaian pada nilai v = 2, $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, $L_{l1} = 2$, $L_{l2} = 1$, M = 3.



$$L_1 = L_{l1} + M$$
$$L_2 = L_{l2} + M$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix}, \quad \underline{L} = \begin{bmatrix} L_1 & -M \\ -M & L_2 \end{bmatrix}$$

(40%)

c. Tunjukkan bahawa jika w(x,y) = u(x,y) + v(x,y), yang mana u dan v memuaskan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

maka u dan v ialah penyelesaian bagi persamaan Laplace,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Carilah rumus bagi $u(x,y)$ jika $v(x,y) = xy - e^y \sin x$.

(30%)

5. a. Tiga vektor yang ditakrifkan dalam ruang vektor adalah seperti berikut:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \underline{z} = \underline{x} + \underline{y}$$

(i) Buktikan

$$\|\underline{x} \times \underline{y}\| = \|\underline{x} \times \underline{z}\| \leq \|\underline{x}\| \, \|\underline{y}\|$$

dan

$$\|\underline{x} \times \underline{z} \times \underline{y}\| < \|\underline{x} \times \underline{z}\| \, \|\underline{y}\|$$

(20%)

(ii) Carilah sudut diantara

$$(3\underline{z} + 2\underline{y} - \underline{x}) \text{ dan } (2\underline{x} - \underline{y}) \times \underline{z}$$

(20%)

b. Selesaikan sistem linear yang berikut dengan menggunakan kaedah penyongsangan:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \qquad 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \qquad x_2 + 2x_3 = 1$$

(20%)

c. Jika $\underline{U} = \begin{bmatrix} ai & bi \\ 2ai & -i \end{bmatrix}$ ialah matriks unitari, carilah nilai a dan b.

(10%)

d. Gunakan pemisahan pembolehubah untuk mendapatkan satu penyelesaian bagi,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad u = u(x,y)$$

(30%)

6. a. Selesaikan sistem linear berikut dengan menggunakan kaedah Cramer.

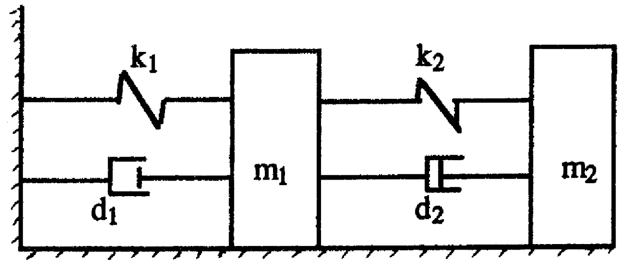
$x_1 + x_2 - x_3 = 1 \qquad x_2 + x_3 = 1 \qquad x_1 - 2x_3 = 0$

Dapatkan penyelesaian yang berubah-ubah.

(20%)

b. Sistem jisim/spring di bawah beroperasi secara ayunan bebas. Selesaikan bagi anjakan x_1 dan x_2. Kemudian dapatkan penyelesaian bila $m_1 = 2$, $d_1 = 10$, $k_1=4$, $m_2 = 6$, $d_2 = 0$, $k_2=12$ dan syarat awalnya ialah

$$x_o = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$



(40%)

c. (i) Selesaikan persamaan gelombang yang berikut:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad u = u(x,y,t)$$

(25%)

(ii) Selesaikan $\frac{\partial u}{\partial x} = y\frac{\partial u}{\partial y}$, $u(0,y) = u(x,1) = 1$

(15%)

-oooOooo-