

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama  
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

---

**ARAHAN KEPADA CALON:**

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7 muka surat tercetak dan ENAM soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab EMPAT (4) SOALAN SAHAJA.. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi tiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Kiralah panjang laluan pilin,

$$\vec{r} = a \cos wt \vec{i} + a \sin wt \vec{j} + ct \vec{k},$$

di antara titik  $(a, 0, 0)$  dan  $(a, 0, \frac{2\pi c}{w})$ ,

yang mana  $a$ ,  $w$  dan  $c$  adalah malar.

(25%)

- (b) Sebutir zarah bergerak sepanjang laluan,

$$\vec{r} = (t^3 - t)\vec{i} + 4t^2\vec{j} + t \cos \pi t \vec{k},$$

yang mana  $\vec{r}$  ialah vektor kedudukan bagi zarah itu dan  $t$  ialah masa. Dapatkan halaju dan kelajuan zarah tersebut pada masa  $t = 1$ .

(25%)

- (c) Jika  $z_1$  dan  $z_2$  ialah dua nombor kompleks yang mana

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{dan} \quad z_2 = 4 - 3i$$

Nyatakan:    i)  $z_1 z_2$                             ii)  $e^{\frac{z_2}{2z_1}}$

iii)  $\cos z_1 \sinh z_2$

dalam bentuk kartesian. Seterusnya kiralah

i)  $\left| \frac{z_2}{z_1} \right|$                             ii)  $\arg(\log z_2)$

(50%)

2. (a) Berikan takrif kecapahan suatu medan vektor. Terangkan secara ringkas mengenai kecapahan medan vektor secara fizikal.  
Kiralah kecapahan dan keikalan bagi medan vektor,

$$\vec{V} = y^2 e^{z\vec{i}} + 3xy e^{z\vec{j}} + xy^2 e^{z\vec{k}}$$

(30%)

- (b) Katakan  $\phi(x, y, z) = 2xy + 3xz^2$ . Carilah terbitan berarah bagi  $\phi$  dalam arah  $2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  pada titik  $(1, 2, 1)$ .

(20%)

- (c) Jika  $z = x + iy$  dan  $f(z) = u + iv$ , tunjukkan bahawa fungsi,

i)  $v = e^x \cos y + e^{-y} \sin x$

dalam sebutan  $v$  yang mungkin. Carilah fungsi konjugat bagi  $u$  dan  $f(z)$ .

ii)  $u = y^2 - x^2 - \sinh 2x \sin 2y$

dalam sebutan  $u$  yang mungkin. Carilah fungsi konjugat  $v$  dan  $f(z)$ .

(50%)

3. (a) Katakan  $\phi$  dan  $\psi$  ialah dua medan skalar. Buktikan bahawa

$$\nabla \cdot (\nabla \phi \times \nabla \psi) = 0$$

(20%)

- (b) Nyatakan Teorem Green dalam suatu satah. Katakan  $\gamma$  ialah lengkungan tertutup menyusur secara lawan arah jam dan dibatasi oleh segiempat  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Dengan menggunakan Teorem Green atau cara lain, carilah nilai kamiran garis,

$$\int_{\gamma} (y^5 + 4x^3y)dx + (x^4 + x^3)dy$$

(30%)

- (c) Jika  $w$  ialah fungsi beranalisis  $z$  dalam beberapa domain, dan titik-titik  $w_1$  dan  $w_2$  dalam satah  $w$  masing-masingnya sepadan dengan titik  $z_1$  dan  $z_2$  dalam satah  $z$ .

Tulislah rumus bagi  $\frac{dw}{dz}$  dan  $\arg\left(\frac{dw}{dz}\right)$  bagi pemetaan menyamabentuk .

Jika  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 0$ ,  $z_3 = 1$  ialah titik-titik dalam satah  $z$  yang mana masing-masing dijelmakan kepada titik-titik  $w_1 = 0$ ,  $w_2 = i$ ,  $w_3 = 3i$  dalam satah  $w$ , dapatkan penjelmaan dwilelurus bagi  $w = f(z)$ .

(50%)

4. (a) Nyatakan Teorem Kecapahan Gauss dan dengan menggunakan teorem ini, carilah,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

yang mana  $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (y - 4xz)\vec{j} + xz\vec{k}$  dan  $S$  ialah segiempat yang dibatasi oleh satah koordinat  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  dan satah  $x = 4$ ,  $y = 2$ ,  $z = 3$ .

(30%)

- (b) Kerja yang dilakukan oleh daya  $\vec{F}$  ke suatu zarah diberi oleh kamiran garis

$$w = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

yang mana  $c$  ialah laluan yang dilalui oleh zarah. Dapatkan kerja yang dilakukan ke atas zarah oleh daya,

$$\vec{F} = (3x^2yz^2 + e^x)\vec{i} + x^3z^2\vec{j} + 2x^3yz\vec{k}$$

apabila zarah tersebut bergerak sepanjang lengkungan licin dari origin ke  $(-1, 3, 1)$ .

(30%)

- (c) Nilaikan:

i)  $\oint_c \frac{(z + 1)dz}{z^3 - 5z^2 + 4z}$

ii)  $\oint_c \frac{e^{iz} dz}{(z - 2)^3}$

yang mana  $c$  ialah bulatan  $|z| = 3$

(40%)

5. (a) Tunjukkan bahawa medan vektor,

$$\vec{V} = (10xy + \cos x)\vec{i} + (5x^2 + 3z^2)\vec{j} + 6yz\vec{k}$$

adalah abadi. Seterusnya dapatkan fungsi upaya  $\phi(x, y, z)$  supaya  $\vec{V} = \nabla\phi$ .

(30%)

- (b) Tunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \frac{2\pi a^n}{1 - a^2}$$

yang mana  $n = 1, 2, \dots$  dan  $0 < a < 1$ .

(30%)

- (c) Nilaikan:

i)  $\oint_{c_1} \frac{\cos z \, dz}{z^2(z+2)}$

ii)  $\oint_{c_1+c_2} \frac{e^{-3z} \, dz}{(z-1)^4}$

yang mana  $c_1$  ialah bulatan  $|z| = 2$   
 $c_2$  ialah bulatan  $|z - 5| = 1$

(40%)

6. (a) Kiralah pusingan medan vektor,

$$\vec{F} = (x - y)\vec{i} + x^2y\vec{j} + xz\vec{k}$$

lawan arah jam terhadap bulatan  $x^2 + y^2 = 1$ .

Petua: Gunakan Teorem Stoke dengan  $S$  merupakan sebarang permukaan licin dan  $C$  sebagai sempadannya.

(40%)

- (b) Jika  $z = x + iy$  dan  $w = u + iv$  dan penjelmaan

$$w = \frac{z - i}{1 - iz},$$

buktikan bahawa paksi nyata dalam satah  $z$  dijelmakan kepada bulatan dalam satah  $w$  dan paksi khayalan dalam satah  $z$  (pada  $y = 3$ ) dijelmakan kepada garislurus dalam satah  $w$ .

Buktikan juga bahawa paksi nyata dalam satah  $w$  (pada  $u = 1$ ) dijelmakan kepada bulatan dalam satah  $z$  menyentuh paksi  $y$ .

Tunjukkan pemetaan-pemetaan ini dengan melakarkan gambarajah dalam satah  $z$  dan berpandukan dengan gambarajah dalam satah  $w$ .

(60%)