UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1991/92

Oktober/November 1991

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 8 muka surat bercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Tunjukkan kerja dengan jelas. Mesinkira, jika perlu, boleh diguna.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Jikalau $\phi = \phi(x, y, z)$ menyelesaikan persamaan Laplace

$$\nabla^2 \phi = 0 \; (\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underset{\sim}{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underset{\sim}{k}\frac{\partial}{\partial z}), \; \Phi(r, \theta, z) = \phi(x(r, \theta), y(r, \theta), z)$$

dan r dan θ ialah koordinat kutub (polar), tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

(30%)

(b) Pertimbangkan permukaan $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

(i) Cari persamaan bagi satah tangen kepada permukaan $z = f(x, y)$ pada titik (1, 2, 5).

(10%)

(ii) Tentukan jarak perpendek di antara (1, 1, -2) dengan permukaan $z = f(x, y)$.

(20%)

(c) Nilaikan setiap kamiran berikut:-

(i) $$\oint_C (|x|dx + |y|\,dy),$$

$C = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 ; x, y \text{ nyata}\}$
dan C diberi arah pusingan jam.

(20%)

(ii) $$\int\!\!\int_R \text{Sin}\,(x^2 + y^2)\, dA,$$

$A = \{(x, y):\; 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\; y \le x,\; y \ge 0 ; x,y \text{ nyata}\}$

(20%)

2. Di bawah syarat tertentu, teorem berikut adalah benar:-

<u>Teorem Green</u>:

$$\oint [Pdx + Qdy] = \int_R \int \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right] dA$$

<u>Teorem Gauss-Ostrogradskii</u>:

$$\int_S \int \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\hat{n}}\, dA = \int_v \int \int \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F}\, dV$$

(a) Jikalau C ialah satu lengkung tertutup yang terletak pada satah Oxy dan luas yang terkandung oleh lengkung itu ialah A, tunjukkan bahawa

$$A = (b - a_2)^{-1} \oint_C [(a_1 x + a_2 y + a_3)\, dx + (b_1 x + b_2 y + b_3)\, dy]$$

di mana a_i dan b_i ($i = 1, 2, 3$) ialah pemalar yang diberi dan $b_1 \neq a_2$.

(10%)

(b) Terdapat satu rantau pada satah Oxy yang ditakrifkan sebagai $R = \{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1 ; x, y, a, b \text{ nyata}\}$.

(i) Gunakan bahagian (a) untuk menentukan luas bagi rantau R.

(20%)

(ii) Jikalau tekanan (daya per luas unit) terhadap rantau R diberi oleh fungsi $P(x, y) = x^2 + y^2$, tentukan jumlah daya yang di alami oleh R.

(20%)

4. Pertimbangkan persamaan pembezaan separa (PPS)

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot (K(x, y, z) \underset{\sim}{\nabla} \phi) = 0 ;$$

K (x, y, z) ialah suatu fungsi tertentu yang diberi ;

$$\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underset{\sim}{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underset{\sim}{k}\frac{\partial}{\partial z} \; ; \; \phi = \phi(x, y, z) \text{ ialah}$$

penyelesaian bagi PPS di atas jikalau ϕ memenuhi PPS itu.

(i) Jikalau $\phi = \phi$ (x, y, z) ialah satu penyelesaian untuk PPS di atas dalam ruang V yang terkandung oleh permukaan tertutup S, buktikan bahawa

$$\oint\!\!\oint_S K(x,y,z)\, \hat{\underset{\sim}{n}} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \phi \, dA = 0 ;$$

$\hat{\underset{\sim}{n}}$ ialah vektor normal unit pada S.

(10%)

(ii) Jikalau ϕ_1 dan ϕ_2 ialah dua penyelesaian (berlainan) untuk PPS di atas dalam ruang V yang terkandung oleh permukaan tertutup S, tunjukkan bahawa

$$\oint\!\!\oint_S K(x, y, z) \left[\phi_1 \hat{\underset{\sim}{n}} \cdot \nabla \phi_2 - \phi_2 \hat{\underset{\sim}{n}} \cdot \underset{\sim}{\nabla} \phi_1\right] dA = 0 ;$$

$\hat{\underset{\sim}{n}}$ ialah vektor normal unit pada s.

(Petunjuk: Anda boleh menggunakan keputusan (tanpa bukti)

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot (f \underset{\sim}{F}) = f \underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{F} + \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{\nabla} f .)$$

(40%)

3. (a) Biar $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ $(z = x + iy ; i = \sqrt{-1})$ jadi satu fungsi yang beranalisis dalam satu rantau kompleks Ω.

(i) Nyatakan hubungan Cauchy-Riemman di antara fungsi u dan v.

(10%)

(ii) Terangkan samada $f(z) = \exp(\bar{z})$ adalah fungsi beranalisis atau tidak.

(10%)

(iii) Tunjukkan bahawa u dan v menyelesaikan persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

dan rantau Ω .

(10%)

(iv) Tunjukkan bahawa

$$\phi(x, y) = \sum_{n=0}^{M} \left(a_n r^n \cos(n\theta) + b_n r^n \sin(n\theta)\right)$$

(a_n dan b_n ialah pemalar ; $r^2 = x^2 + y^2$; $\tan\ \theta = y/x$)
ialah satu penyelesaian untuk persamaan Laplace dalam bahagian (iii).

(Petunjuk : Pertimbangkan fungsi $f(z) = z^n$ ($n \geq 0$ ialah integer)

(10%)

(b) Fungsi Plemelj yang memainkan peranan yang penting dalam penyelesaian berbagai masalah fizikal, seperti mekanik retak, ditakrifkan sebagai

$$X(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2}, \quad z = x + iy, \quad i = \sqrt{-1}$$

Tunjukkan bahawa fungsi X(z) boleh ditulis semula dalam bentuk

$$X(z) = R_1^{-1/2} \; R_2^{-1/2} \; \exp\left[-i\,(\theta_1 + \theta_2)/2\right] ;$$

$R_1 = |z - a|$, $R_2 = |z + a|$,

$\theta_1 = \arg(z - a)$ dan $\theta_2 = \arg(z + a)$.

(10%)

Dalam soalan berikut, andaikan bahawa $0 \leq \theta_1 < 2\pi$ dan $0 \leq \theta_2 < 2\pi$.

Biar $\phi\,(x, y) = \text{Re}\,\{\,(z + [X(z)]^{-1}\,)\,i\}$.
(Re mewakili bahagian nyata sesuatu nombor kompleks.)
Nilaikan:

(i) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ untuk $y = 0$ dan $|x| < a$.

(10%)

(ii) $\dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ untuk $y = 0$ dan $|x| > a$.

(10%)

(iii) $\lim\limits_{y \to 0^+} \left\{\phi(x, y) - \phi(x, -y)\right\}$ untuk $|x| < a$.

(15%)

(iv) $\lim\limits_{y \to 0^+} \left\{\phi(x, y) - \phi(x, -y)\right\}$ untuk $|x| > a$.

(15%)

4. Rumus untuk kamiran Cauchy adalah diberi oleh

$$2\pi i\, f(z_o) = \int_C \frac{f(z)\, dz}{z - z_o}$$

(a) Dengan membezakan rumus yang diberi di atas, dapatkan satu ungkapan untuk kamiran

$$\int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_o)^{n+1}} \text{ (n} \geq 0 \text{ ialah integer).}$$

(15%)

(b) Takrifkan C_1, C_2 dan C_3 sebagai lengkung bulatan dalam ruang kompleks z yang kesemuanya berpusat (0, 0). Lengkung C_1, C_2 dan C_3 masing-masing berjejari 1, 2 dan 3 unit; C_1 dan C_3 diberi arah pusingan jam, manakala C_2 diberi arah pusingan lawan jam. Nilaikan setiap kamiran berikut:

(i) $$\oint_{C_2} \frac{\sin(z)\, dz}{(2z^2 + \pi z - \pi^2)}$$

(10%)

(ii) $$\oint_{C_3} \frac{(z^3 + 2z + 1)\, dz}{z\,(2 - z)\,(z + 1)}$$

(10%)

(iii) $$\oint_{C_1 U(-C_3)} \frac{\exp(z)\, dz}{z\,(3z + i\pi)(2z - i\pi)}$$

(10%)

(iv) $$\oint_{X_1} \frac{P(z)\, dz}{z^{m+1}}, \quad m \geq 0 \text{ ialah integer, } P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k,$$

a_k ialah pemalar.

(15%)

(c) Nilaikan setiap kamiran berikut:-

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6}$

(20%)

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos\theta}$

(<u>Petunjuk</u>: Biar $z = \exp(it)$.
kemudian, $\cos(t) = z + z^{-1}$.)

(20%)