UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1989/90

Oktober/November 1989

EUM 201 - Matematik Kejuruteraan III

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 9 muka surat tercetak dan LIMA (5) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan. Tunjukkan jalan pengiraan dengan jelas.

Buku sifir matematik serta mesinkira boleh digunakan.

Setiap soalan mesti dimulakan di muka surat yang baru.

Agihan markah bagi setiap bahagian soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukkan bagi soalan berkenaan. Setiap soalan bernilai 100 markah.

Jawab kesemua soalan di dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Diberi bahawa

$$x = A\cos(\omega t + a), \quad y = B\cos(\omega t + \beta), \quad z = Ct$$

yang mana A, B, C, ω, α, β adalah pemalar-pemalar, dan

$$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$$

tunjukkan bahawa persamaan pembezaan bagi pergerakan titik $\underset{\sim}{r}$ adalah

$$\underset{\sim}{r}''(t) + \omega^2\underset{\sim}{r} = C\omega^2 t\underset{\sim}{k}$$

(15%)

(b) Vektor bagi kedudukan satu zarah pada masa t adalah

$$\underset{\sim}{r} = (t + \sin t)\underset{\sim}{i} + (t - \sin t)\underset{\sim}{j} + (1 - \cos t)\sqrt{2}\,\underset{\sim}{k}$$

Tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{r}'(t)$ dan $\underset{\sim}{r}''(t)$ mempunyai magnitud yang malar dan tunjukkan juga bahawa kedua-dua vektor ini adalah serenjang.

(30%)

(c) Diberi hubungan

$$r^n = (x^2 + y^2 + z^2)^{n/2}$$

tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{\nabla} r^n = nr^{n-2}\underset{\sim}{r}$, yang mana pengoperasi $\underset{\sim}{\nabla}$ adalah

$$\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underset{\sim}{j}\frac{\partial}{\partial y} + \underset{\sim}{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

dan $\underset{\sim}{r}$ adalah seperti di dalam soalan 1(a).

Kemudian tunjukkan bahawa $\nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$, yang mana $\nabla^2 = \underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{\nabla}$

[Petunjuk : $\nabla.(\phi u) = (\nabla\phi).u + \phi\nabla.u$, ϕ fungsi skalar, $\underset{\sim}{u}$ vektor].

(40%)

(d) Suhu T di titik (x, y, z) diberi oleh $T = x^2 - y^2 + xyz + 273$. Apakah arah kadar maksimum suhu meningkat di (-1, 2, 3)? Apakah nilainya? Apakah arah aliran haba di titik ini?

(15%)

2. (a) Nilaikan kamilan garis

$$I = \int_C (x+y)dx$$

yang mana C adalah laluan mengikut pusingan jam dari A(0, 1) ke B(0, -1) mengikut separuh bulatan

$$x^2 + y^2 = 1$$

(20%)

(b) Nilaikan kamilan garis

$$I = \oint_C (2xy\ dy - x^2 dx)$$

yang mana C adalah laluan lawan pusingan jam di atas sempadan segitiga bermula dengan bucu P(0, 0), kemudian ke Q(1, 0), ke R(1, 1) dan balik ke P(0, 0).

(20%)

(c) Sejenis cecair mempunyai ketumpatan ρ yang berubah-ubah mengikut kedudukan dan masa, iaitu $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Jika kita ikut aliran cecair, iaitu mengikut garis arus, maka x, y, z adalah fungsi-fungsi bagi t, supaya halaju cecair adalah

$$\underset{\sim}{v} = \underset{\sim}{i}\frac{dx}{dt} + \underset{\sim}{j}\frac{dy}{dt} + \underset{\sim}{k}\frac{dz}{dt}$$

Tunjukkan bahawa

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underset{\sim}{v}.\underset{\sim}{\nabla}\rho \qquad (1)$$

Jika ditakrifkan fungsi vektor $\underset{\sim}{V} = \underset{\sim}{v}\rho$, persamaan keterusan (continuity equation) adalah

$$\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{V} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

Dengan menggunakan persamaan (1) dan (2) buktikan

$$\rho\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{v} + \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Jika cecair ini tak boleh mampat, apakah $\rho'(t)$? Untuk kes ini nilaikan $\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{v}$.

(40%)

(d) Biar $\phi = e^x \cos y$, yang mana ϕ adalah suhu di dalam satah xy. Cari:

(i) Arah suhu meningkat pada kadar maksimum di titik $(1, -\pi/4)$ serta magnitud kadar ini.

(ii) Kadar perubahan suhu di $(0, \pi/3)$ di dalam arah $\underset{\sim}{i} + \underset{\sim}{j}\sqrt{3}$.

(20%)

3. (a) Teorem Green di dalam satah menyatakan

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (Pdx + Qdy) \qquad (1)$$

yang mana C adalah sempadan bagi satu rantau R yang berarah melawan pusingan jam dan $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ mempunyai terbitan separa pertama selanjar di setiap titik di dalam R.

Gunakan teorem di atas untuk menunjukkan bahawa luas bagi R adalah

$$A = \frac{1}{2} \oint_C (x\,dy - y\,dx) \qquad (2)$$

Kemudian guna (2) untuk kira luas di bawah sikloid

$$\underset{\sim}{r} = a(t - \sin t)\underset{\sim}{i} + a(1 - \cos t)\underset{\sim}{j}\ , \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

(35%)

(b) Nilaikan yang berikut dengan cara termudah

(i) $\oint_C [(x \sin x - y)dx + (x - y^2)dy]$ C : segitiga yang mempunyai bucu-bucu di (0, 0), (1, 1), (2, 0), mengikut pusingan jam.

(ii) $\oint_C ((2y\,dx - 3x\,dy))$ C : segiempat yang dibatas oleh $x = 3$, $x = 5$, $y = 1$, $y = 3$, melawan pusingan jam.

(iii) $\oint_C [y \sinh x\, dx + (x + \cosh x)dy]$ C : bulatan unit, ikut pusingan jam.

(30%)

(c) Jika didapati

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

dan $\dot{R}$ adalah cakera unit $x^2 + y^2 \leq 1$, terangkan sama ada Teorem Green (soalan 3(a)) boleh digunakan atau tidak. (Jangan nilaikan RHS dan LHS bagi persamaan (1) di dalam 3(a) di atas).

(20%)

(d) Jika diberi $\underset{\sim}{F} = F_1 \underset{\sim}{i} + F_2 \underset{\sim}{j}$, tunjukkan bahawa hubungan

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

bermakna $\oint_C \underset{\sim}{F} . d\underset{\sim}{r}$ tidak bergantung kepada laluan C. Adakah

$\oint_C \underset{\sim}{F} . d\underset{\sim}{r}$ bergantung kepada arah laluan C?

(15%)

4. Untuk soalan ini $j = \sqrt{-1}$, manakala $\{\underset{\sim}{i}, \underset{\sim}{j}, \underset{\sim}{k}\}$ adalah set vektor-vektor unit masing-masing di dalam arah paksi x, paksi y dan paksi z.

(a) Bagi fungsi $w(z) = z^\alpha$, α nyata atau kompleks,

$$z^\alpha = \exp(\alpha \ln z)$$

(i) Jika $z = r\exp(j\theta)$ tulis semula z^α di dalam sebutan r dan θ.

(ii) Sekarang biar $\alpha = a + jb$, satu nombor kompleks. Tulis z^α di dalam bentuk Cartesian (iaitu $u + jv$), dengan menggunakan ungkapan yang didapati di dalam (i).

(iii) Kemudian nilaikan c yang mana

$$c = 1^j$$

(35%)

(b) Jika $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ adalah analitik di dalam domain D, maka persamaan-persamaan Cauchy-Riemann berikut adalah benar.

$$u_x = v_y \qquad u_y = -v_x$$

(i) Jika diandai bahawa terbitan-terbitan separa bagi u dan v bagi semua peringkat wujud, maka buktikan bahawa u dan v memenuhi persamaan Laplace

$$\nabla^2 u = 0, \ \nabla^2 v = 0.$$

(ii) Tunjukkan bahawa

$$u(x, y) = 3xy^2 - x^3$$

adalah harmonik di atas satah z. Kemudian cari fungsi harmonik konjugat $v(x, y)$, dan seterusnya tulis $f(z)$.

(30%)

(c) Jika $f(z) = u + jv$ dan jika vektor $\underset{\sim}{F} = v\underset{\sim}{i} + u\underset{\sim}{j}$, maka tunjukkan bahawa $\underset{\sim}{\nabla}.\underset{\sim}{F} = 0$ dan $\underset{\sim}{\nabla} \times \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{0}$ adalah setara dengan persamaan-persamaan Cauchy-Riemann.

(15%)

(d) Nilaikan

$$\int \frac{dz}{8j + z^2}$$

di atas garis $y = x$ daripada 0 hingga ∞.

(20%)

5. (a) Teorem kamilan Cauchy menyatakan, bagi C satu lengkung tertutup mudah dan f(z) satu fungsi analitik di atas dan di dalam C,

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Dengan menggunakan Teorem Cauchy ke atas

$$\oint_C z^{n-m-1}\,dz, \qquad n > m, \qquad C : \text{bulatan } |z| = 1$$

tunjukkan bahawa

$$\int_0^{2\pi} e^{jnx}\, e^{-jmx}\, dx = 0, \qquad n > m$$

(15%)

(b) Rumus kamilan Cauchy pula menyatakan, bagi f(z) analitik di atas dan di dalam lengkung tertutup mudah C (yang diambil melawan pusingan jam),

$$f(a) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

yang mana f(a) adalah nilai f(z) di satu titik z = a di dalam C.
Guna rumus ini untuk kira

$$I = \oint_C \frac{e^{3z}}{z - \ln 2}\,dz, \qquad C : \text{segiempat tepat dengan bucu-bucu } \pm 1 \pm j.$$

(15%)

(c) Dengan cara yang termudah, nilaikan

$$I = \oint_C \frac{\cosh z \, dz}{2 \ln 2 - z}$$

bagi C berikut.

(i) bulatan $|z| = 1$
(ii) bulatan $|z| = 2$

$\left[\text{Rumus} : \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right]$

(25%)

(d) Teorem baki menyatakan, bagi f(z) analitik di dalam dan di atas lengkung tertutup mudah C (kecuali di titik-titik tunggal $z_1, z_2, \ldots, z_k$ di dalam C),

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum_{j=1}^{k} \underset{z=z_j}{\text{Res}} f(z)$$

yang mana C adalah melawan arah jam.

Guna teorem ini untuk menilaikan kamilan tetap

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$$

(45%)

- oooOooo -