UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama

Sidang 1988/89

EUM 201 Matematik Kejuruteraan III

Tarikh: 2 November 1988

Masa: 9.00 pagi - 12.00 tengah hari
(3 jam)

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 10 muka surat bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) soalan. Semua soalan mesti dijawab di dalam Bahasa Malaysia. Setiap soalan dinilai atas 100 markah dan markah yang diperuntukkan bagi tiap-tiap ceraian soalan ditunjukkan di dalam kurungan ( ).

Buku sifir matematik disediakan. Mesin hitung boleh digunakan komputasi. Semua kerja mengira mesti ditunjukkan dengan jelas.

Gunakan buku jawapan baru bagi setiap soalan dan ikatkannya mengikut susunan.

1\. (a) Nyatakan Teorem Cauchy-Gourşat dan rumus Kamiran Cauchy dan gunakannya, yang mana perlu, untuk mengamirkan

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^2 + 1} \, dz$$

yang mana C adalah lintasan

(i) $|z-j| = \frac{1}{2}$ (ii) $|z| = 2$

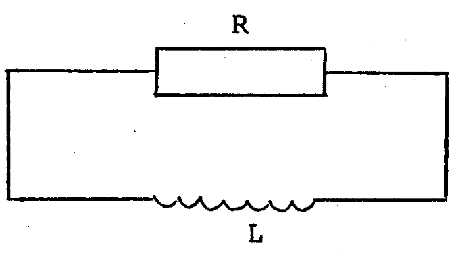
(35 markah)

(b) Tunjukkan bahawa bahagian nyata dan bahagian khayalan dengan terbitan-terbitan separa kedua yang selanjar bagi satu fungsi analisis memenuhi persamaan Laplace berdimensi dua:

$$\nabla^2 \phi \, (x, y) = 0$$

(15 markah)

(c)



Admitans bagi litar di atas adalah dinyatakan oleh

$$w = \frac{1}{R} - \frac{j}{\alpha L}$$

yang mana R adalah rintangan malar, L induktans yang berubah dan α satu pemalar positif.

Lokus bagi admitans selalu digunakan untuk merekabentuk litar-litar elektrik.

(i) Lakarkan lokus bagi admitans w pada satah-w apabila L berubah dari 0 ke ∞.

(15 markah)

(ii) Impedans z bagi satu litar adalah songsang bagi admitans iaitu

$$z = \frac{1}{w}$$

Lakarkan lokus bagi impedans z apabila L berubah dari 0 ke ∞.

(35 markah)

2. (a) Tunjukkan bahawa jika f(z) adalah analisis di dalam dan pada satu lengkung tertutup C, maka

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$$

adalah tak bersandar kepada lintasan yang menyambung titik-titik hujung z_1 dan z_2 yang terletak di dalam C.

(15 markah)

(b) (i) Cari siri Laurent pada pusat $z = -1$ untuk fungsi kompleks berikut:

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

Kemudian nyatakan rantau penumpuan bagi siri ini dan nilaikan reja bagi $f(z)$ pada $z = -1$.

(15 markah)

(ii) Dengan menggunakan kamiran kompleks dan teorem reja, nilaikan

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(1 + \frac{1}{2}\cos\theta)^2}$$

(Petunjuk : $(a^2 + 4a + 1)^2 = a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a + 1$)

(30 markah)

(c) Di dalam masalah elektrostatik berdimensi dua, jika fungsi nyata $u(x, y) = c_1$, malar, yang merupakan garis-garis sama upaya, bersilang secara ortogon dengan satu lagi fungsi $v(x, y) = c_2$, malar, maka $v(x, y) = c_2$ adalah garis-garis daya elektrik.

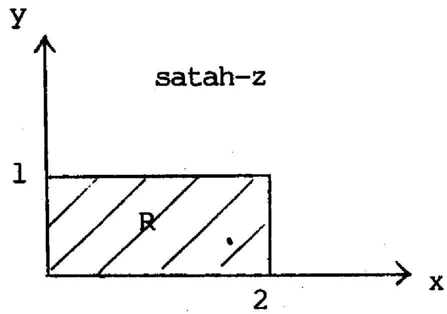
(i) Cari kecerunan-kecerunan bagi kedua-dua fungsi $u(x, y) = c_1$ dan $v(x, y) = c_2$ pada titik (x, y).

(15 markah)

(ii) Katakan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ adalah sebegitu supaya $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ adalah analisis. Di dalam kes ini, jika $u(x, y) = c_1$ adalah garis-garis sama upaya, tunjukkan bahawa $v(x, y) = c_2$ adalah merupakan garis-garis daya elektrik.

(25 markah)

3. (a)



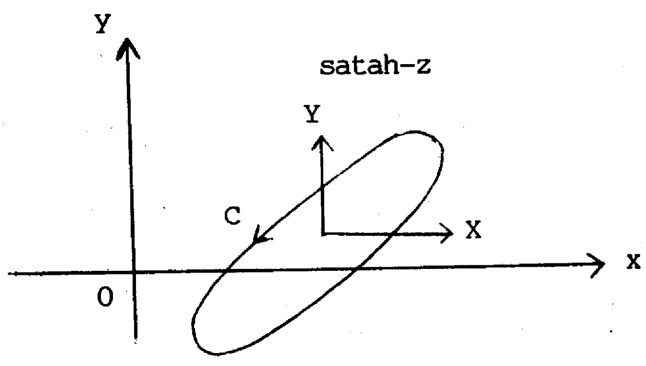
Rantau bersegiempat R adalah ditunjukkan di atas. Lakarkan imej R' pada satah-w bagi R yang dipetakan di bawah transformasi

$$w = \sqrt{2}\, e^{\frac{1}{4}\pi j} z .$$

Pada amnya, huraikan apa yang dihasilkan oleh transformasi $w = \alpha z$ yang mana α adalah satu nombor kompleks malar.

(30 markah)

(b)



Gambarajah di atas menunjukkan bahagian satu silinder di dalam satu aliran mantap tak berputaran dan berdimensi dua bagi satu bendalir unggul. Katakan

C : sempadan silinder

X, Y : Komponen-komponen daya pada silinder yang diakibatkan oleh tekanan bendalir ketumpatan bendalir

σ : Ketumpatan bendalir

w : Upaya kompleks bagi aliran bendalir

Maka Teorem Blasius menyatakan

$$X - jY = \tfrac{1}{2} j\sigma \oint_C \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 dz$$

Jika upaya kompleks bagi aliran bendalir itu adalah didapati

$$w = 10\left(z + \frac{r^2}{z}\right) - \frac{1}{2\pi j} \ln z$$

yang mana r adalah jejari silinder dengan pusat tapaknya pada titik asalan, cari komponen-komponen daya pada silinder itu.

(30 markah)

(c) Dengan menggunakan kamiran kompleks dan teorem reja, nilaikan

(i) $\int_0^\infty \frac{(\ln x)^2}{1 + x^2} dx$

(ii) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2} dx$

(40 markah)

(Petunjuk : $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} x + c$)

4. (a) Jika $\phi = x^2yz^3$ dan $\vec{A} = xz\vec{i} - y^2\vec{j} + 2x^2y\vec{k}$, cari

(i) $\nabla\phi$

(ii) $\nabla.\vec{A}$

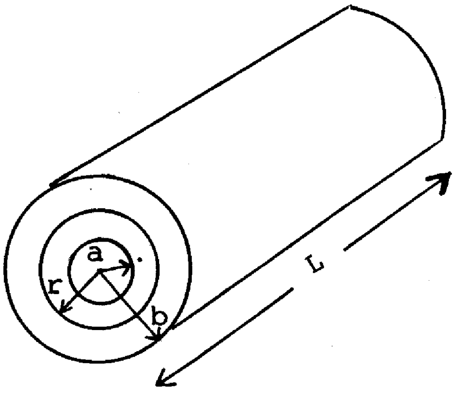
(iii) $\nabla \times \vec{A}$

(iv) div $(\phi\vec{A})$

(v) curl $(\phi\vec{A})$

(50 markah)

(b)



Pertimbangkan satu penebat haba bersilinder keliling satu paip stim. Katakan jejari dalam dan jejari luar bagi penebat itu ialah masing-masing $r = a$ dan $r = b$. Katakan T_a dan T_b adalah suhu-suhu, masing-masing, bagi permukaan dalam dan permukaan luar penebat dan S sebagai permukaan bersilinder dengan jejari r dan panjangnya L di dalam penebat itu. Cari

(i) kuantiti aliran haba per unit masa melalui S dengan anggapan bahawa aliran haba itu adalah dalam keadaan mantap;

(ii) suhu T di dalam penebat sebagai fungsi r.
(Petunjuk berada di muka surat 8).

(Petunjuk : Vektor $\vec{Q} = -k\nabla T$, yang mana k adalah pekali keberkondukan haba, menyatakan, pada setiap titik di dalam ruang, arah pda mana haba mengalir. $|\vec{Q}|$ menyatakan kadar aliran haba per unit luas melalui satu kawasan normal kepada $\vec{Q}$. Anggap bahawa T adalah satu fungsi bagi r sahaja supaya ∇T adalah diarah secara jejarian ke pusat paip dengan magnitud $-\frac{dT}{dr}$ yang nilainya malar di sepanjang sebarang permukaan normal kepada $\vec{Q}$.)

(50 markah)

5. (a) Jika, dalam koordinat silinder, $\vec{A} = \rho\sin\phi\vec{e}_\rho + 2\rho\cos\phi\vec{e}_\phi + 2z^2\vec{e}_z$, cari kecapahan bagi $\vec{A}$ iaitu $\nabla.\vec{A}$ pada titik $(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}, 3)$.

(Petunjuk : Jika $\vec{A} = A_1\vec{e}_\rho + A_2\vec{e}_\phi + A_3\vec{e}_z$,

$$\nabla.A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}).$$

(20 markah)

(b) Nilaikan

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

yang mana S adalah permukaan kubus yang terbatas oleh satah-satah, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 1$ dan medan $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

(30 markah)

(c) Satu zarah bergerak di sepanjang satu lengkung ruang $\vec{r} = \vec{r}(t)$, yang mana t adalah masa. Katakan $v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt}$ adalah magnitud bagi halaju zarah itu (s adalah panjangnya lengkuk di sepanjang lengkung ruang yang diukur dari satu titik awal). Tunjukkan bahawa

(i) $$\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2$$

(ii) pecutan $\vec{a}$ bagi zarah itu adalah

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{\vec{T}} + \frac{v^2}{\sigma}\hat{\vec{N}}$$

di mana

$$\sigma = \left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$\hat{\vec{T}}$ dan $\hat{\vec{N}}$ adalah vektor-vektor unit tangen dan normal kepada lengkung ruang dan $\hat{\vec{T}} = \frac{d\vec{r}}{ds}$.

(50 markah)

6. (a) (i) Nyatakan teorem kecapahan.

(10 markah)

(ii) Dinyatakan $\vec{B} = \left(\frac{5}{2}\rho^3\right)\vec{e}_\rho$ dalam koordinat silinder dan satu isipadu V dikepung oleh $\rho = 1$, $\rho = 2$, $z = 0$ dan $z = 10$. Lakarkan isipadu itu dan gunakan teorem kecapahan untuk menilaikan

$$\oint\!\!\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

yang mana V adalah dikepung oleh permukaan tertutup S.

(Petunjuk : Jika $\vec{A} = A_1\vec{e}_\rho + A_2\vec{e}_\phi + A_3\vec{e}_z$,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_1) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_2}{\partial\phi} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\ )$$

(15 markah)

(b) (i) Nyatakan teorem Stokes.

(10 markah)

(ii) Tunjukkan bahawa teorem Strokes diturunkan kepada teorem Green dalam satah apabila kedua-dua permukaan S dan sempadannya C terletak pada satah $z = 0$.

(20 markah)

(c) Terangkan yang berikut dengan rujukan kepada analisis vektor atau/dan kompleks:

(i) Upaya Electrostatik
(ii) Persamaan keselanjaran untuk bendalir
(iii) Hukum Gauss

(45 markah)

- oooOooo -