UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1991/92

Mac/April 1992

EUM 102 - Matematik Kejuruteraan II

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON:

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 7 muka surat tercetak dan EMPAT (4) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan .

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan yang diperuntukan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan di dalam bahasa Malaysia.

SOALAN 1

(a) Selesaikan setiap persamaan pembezaan biasa berikut:

(i) $yy'(x) = (1 + y^2)^2 \exp(x), \quad y(0) = 1$

[20%]

(ii) $y'(x) = x^{-1}y + \dfrac{x^2}{\cos(x^{-1}y)}$ (secara umum)

[20%]

(iii) $2x^2y''(x) - 3xy'(x) + 2y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(4) = 1$

[20%]

(iv) $y''(x) + y = \exp(2x)$ (secara umum)

[20%]

(b) Gunakan kaedah siri kuasa untuk mendapat penyelesaian umum bagi

$$y''(x) + xy'(x) + y = 0$$

(Anda boleh meninggalkan jawapan anda dalam bentuk siri.)

[20%]

SOALAN 2

Pertimbangkan persamaan pembezaan biasa (PPB) linear yang homogen dan berperingkat N $(N \geq 1)$

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\, y^{(n)}(x) = 0, \qquad y = y(x);$$

$a_n = a_n(x)$ ialah fungsi yang diberi.

(a) Jikalau $y = y_1(x)$ $y = y_2(x)$ ....., $y = y_{N-1}(x)$ dan $y = y_N(x)$ semuanya ialah penyelesaian untuk PBB di atas, tunjukkan bahawa

$$y = \sum_{m=0}^{N} C_m\, y_m(x) \qquad C_m \text{ pemalar,}$$

juga ialah penyelesaian untuk PPB itu.

[20%]

Nyatakan syarat ke atas $y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}$ dan y_N yang perlu untuk

$$y = \sum_{m=0}^{N} C_m\, y_m(x) \qquad C_m \text{ pemalar,}$$

menjadi penyelesaian umum untuk PPB itu.

[10%]

(b) (i) Jikalau (bagi semua x)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\, \lambda^n = 0, \qquad \lambda \text{ pemalar,}$$

maka tunjukkan bahawa $y = \exp(\lambda x)$ ialah satu penyelesaian untuk PBB di atas.

[20%]

(ii) Jikalau (bagi semua x)

$$\sum_{n=0}^{N} a_n(x)\, \lambda^n = (\lambda - k)^2\, Q(\lambda),$$

λ dan k pemalar,

maka tunjukkan bahawa $y = x \exp(kx)$ ialah satu penyelesaian untuk PPB di atas.

[20%]

(c) Gunakan bahagian 2(a) dan (b) di atas untuk mendapat penyelesaian bagi

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y = 0,$$

diberi $y(0) = y'(0) = 0$ dan $y''(0) = 1$

[30%]

SOALAN 3

Jelmaan Laplace bagi sesuatu fungsi f(t) (t > 0) ditakrifkan sebagai

$$L\{f(t); s\} = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)\,dt.$$

(a) Cari L {f(t); s} jikalau

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{bagi } 0 < t < 2, \\ \exp(t-2) & \text{bagi } t \geq 2. \end{cases}$$

Jikalau s ialah parameter yang nyata, apakah syarat ke atas s yang diperlu untuk L {f(t); s} wujud ?

[30%]

(b) Buktikan setiap keputusan berikut:

(i) $L\{\sigma f(t) + \beta g(t); s\} = \sigma L\{f(t); s\} + \beta L\{g(t); s\}$, σ dan β pemalar

[10%]

(ii) Jikalau $F(s) = L\{f(t); s\}$ dan $G(s) = \int_0^T f(t)\exp(-st)dt$ (T > 0) maka

$$L\{f(t+T)\ s\} = \exp(st)[f(s) - G(s)]$$

[20%]

(c) Gunakan jelmaan Laplace untuk menyelesaikan

$$y'(t) - \int_0^t y(u)\,du = \exp(-2t),\ t > 0,$$

di beri y(0)=0

(Petunjuk : Anda boleh menggunakan keputusan berikut:-

$$L\{f'(t); s\} = s\,L\{f(t); s\} - f(0)$$

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du; s\right\} = \frac{1}{s}L\{f(t); s\}$$

$$L\{\exp(at); s\} = \frac{1}{s-a}.$$)

[40%]

SOALAN 4

(a) Terdapat 3 peristiwa A, B dan C yang tak bersandar. Jikalau kebarangkalian peristiwa peristiwa A berlaku ialah 1/6, B tidak berlaku ialah 3/4 dan C berlaku ialah 2/3, tentukan kebarangkalian

(i) ketiga-tiga peristiwa berlaku.

[10%]

(ii) peristiwa A atau B berlaku.

[10%]

(b) Sesuatu mesin dimuatkan dengan 3 bateri A, B dan C. Mesin ini akan berfungsi dengan baik jikalau sekurang-kurangnya 2 daripada bateri itu mempunyai kuasa. Biar $P_N(X)$ jadi kebarangkalian.

bateri X menghabiskan kuasanya dalam masa kurang daripada N jam. Jikalau $P_{50}(A) = 1/10$, $P_{50}(B) = 1/5$, $P_{50}(C) = 3/10$,

$P_{100}(A) = 1/5$, $P_{100}(B) = 2/5$ dan $P_{100}(C) = 7/10$,

tentukan kebarangkalian mesin itu akan berfungsi dengan baik dalam masa antara 50 dan 100 jam.

[20%]

(c) Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi satu pembolehubah rawak X ialah

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 + B & \text{bagi } |x| < 1, \\ 0 & \text{bagi } |x| > 1 \end{cases} ;$$

A dan B ialah pemalar.

(i) Jikalau kebarangkalian X mengambil nilai yang kurang daripada 1/2 ialah 5/8 , iaitu $P(X < 1/2) = 5/8$, maka tentukan A dan B.

[20%]

(ii) Tentukan sisihan piawai (σ) bagi X.

(Gunakan nilai A dan B yang anda dapati dalam bahagian (i) di atas)

[10%]

(d) Biar X jadi satu pembolehubah rawak yang mengikut taburan <u>normal</u>.
Nilai min (purata) bagi x ialah $\mu = 50$

sisihan piawai bagi x ialah $\sigma = 3$.

Biar P (x < a) jadi kebarangkalian X mempunyai satu nilai yang kurang daripada a.

Tentukan nilai c supaya

(i) P (x < c) = 1/10

[10%]

(ii) P(50 - c < x < 50 + c) = 2/5

[20%]

(<u>Maklumat</u>: Fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi taburan normal ialah

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{\sigma}\right)^2\right]$$

Takrifkan

$$\Phi(z) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{z} \exp(-u^2/2)\, du.$$

Anda boleh guna nilai-nilai berikut (jika hendak):-

$\Phi(z)$	z
0.1000	−1.282
0.2000	−0.842
0.3000	−0.524

-oooOooo-