UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
Sidang 1992/93

Oktober/November 1992

EUM 101 - Matematik Kejuruteraan 1

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON :

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 9 muka surat berserta lampiran (2 muka surat) bercetak dan ENAM (6) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab LIMA (5) SOALAN SAHAJA. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Carilah had bagi fungsi-fungsi berikut (jika wujud):

(i) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{8-2x}$;

(ii) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x\to 0} \frac{\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$;

(iii) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x\to 0} \frac{3x^2}{\operatorname{Sin} 5x}$;

(iv) $\displaystyle \operatorname*{had}_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} x & , x < 2 \\ 2-x & , x \geq 2. \end{cases}$

(40%)

(b) Berikan takrif;

Fungsi f adalah selanjar pada c;
Fungsi f adalah boleh beza pada c.

Jika fungsi f diberi sebagai,

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{Cos} x & \text{untuk } x < 0 \\ 1+x^2 & \text{untuk } x \geq 0, \end{cases}$$

tunjukkan bahawa f adalah selanjar dan boleh beza pada $x = 0$.

(30%)

(c) Jika $I_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \operatorname{Cos}^n x\,dx$, tunjukkan bahawa

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}, \; n \geq 2$$

(Petua: Gunakan kamiran bahagian demi bahagian sebanyak dua kali)

Seterusnya dapatkan nilai $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^x \operatorname{Cos}^4 x\,dx$.

(30%)

2. (a) Carilah $\frac{dy}{dx}$ jika ,

(i) $y = x^2 e^{\text{Cos } 2x}$

(ii) $y = \ln \text{ Cos } 3x$

(iii) $ax^3 + bxy^2 + cy^3 = d$

yang mana a, b, c dan d ialah nombor-nombor nyata.

(30%)

(b) Dapatkan nilai kamiran berikut:

(i) $\int \text{Sin } 5x \text{ Cos } 3x dx$

(ii) $\int \sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}\, dx$

(iii) $\int x^2 \ln^2 x dx.$

(30%)

(c) Carilah titik-titik genting dan tentukan nilai maksimum dan minimum tempatan bagi fungsi,

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 5$$

Lakarkan graf bagi fungsi di atas dengan menentukan selang-selang di mana graf tersebut menokok, menyusut, cekung ke atas dan cekung ke bawah.

(40%)

3. (a) Carilah nilai

(i) $$\int_{0}^{\pi/2} \frac{\text{Sin } 2x}{1 + \text{Cos}^2 x} dx \quad ;$$

(ii) $$\int_{0}^{\pi} x^2 \text{ Sin } x \, dx.$$

(20%)

(b) Dapatkan isipadu yang dijana oleh rantau yang dibatasi oleh $y = 5 \text{ Cos } 2x$, paksi x dan garis $x = 0$ dan $x = \pi/4$, berputar terhadap paksi x melalui satu putaran yang lengkap.

(20%)

(c) Terangkan kaedah Newton untuk mendapatkan penghampiran punca bagi suatu persamaan. Dengan menggunakan kaedah ini, dapatkan penghampiran punca bagi persamaan $x^3 - 5 = 0$, yang terletak di antara $x = 1$ dan $x = 2$. Gunakan titik awal $x_0 = 1.5$. Berikan jawapan anda tepat kepada tiga titik perpuluhan.

(30%)

(d) Perhubungan di antara fungsi harga seguni padi, h(x), dan bilangan guni dalam juta yang diperolehi setiap tahun, x diberi oleh model matematik.

$$h(x) = \frac{2}{x + 1}$$

yang mana h(x) dinyatakan dalam ringgit per guni dan x ialah bilangan guni dalam juta. Seorang ahli ekonomi pertanian meramalkan dua juta guni padi boleh dikeluarkan pada tahun 1992 ini. Biasanya peratus ralat ramalan yang dibuat ialah 10%. Apakah ralat relatif atau ketidaktentuan harga per guni padi?.

(30%)

4. (a) Siasatkan ketumpuan setiap siri tak terhingga berikut:-

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} n^p(1+q)^n$, diberi p dan q ialah nombor nyata.

(15%)

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a}{n^b+2}$, di beri a dan b ialah nombor nyata.

(15%)

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^c}$, di beri c ialah nombor nyata

(15%)

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha/n}$, di beri α ialah nombor nyata.

(15%)

(b) Pertimbangkan fungsi $f(x) = x^x$ untuk $x \neq 0$.

(i) Tunjukkan bahawa

$$\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}} = \frac{d^n f}{dx^n} + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{x^m} \left(\frac{d^{(n-m)}f}{dx^{(n-m)}} \right)$$

di beri n ialah integer positif.

(20%)

(Petanda: Gunakan petua pembezaan Leibnitz.

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \frac{d^m f}{dx^m} \left(\frac{d^{(n-m)}g}{dx^{(n-m)}} \right) \quad)$$

(ii) Tentukan polinomial Taylor peringkat 4 bagi f(x) pada titik x = 1.

(10%)

(iii) Gunakan jawapan anda dalam bahagian (ii) di atas untuk mendapat satu nilai anggaran bagi kamiran

$$\int_1^{\frac{3}{2}} x^x dx$$

(10%)

...6/-

5. Jikalau f(x) ialah fungsi berkala dengan kala 2L maka siri Fourier untuk f(x) di beri oleh

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{Sin}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

di mana, untuk n = 0, 1, 2,........

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx.$$

(a) Buktikan

$$\frac{a_o^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n^2 + b_n^2\right\} = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\{f(x)\}^2 dx$$

(20%)

(b) Jikalau $\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2 dx$ wujud, maka tunjukkan bahawa

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{Cos}(nx)dx = 0$$

(10%)

(c) Jikalau $f(x) = x(\pi - x)$ untuk $0 \le x \le \pi$, maka buktikan

(i) $$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2nx)}{n^2}$$ (20%)

(ii) $$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin([2n-1]x)}{[2n-1]^3}$$ (20%)

(d) Gunakan bahagian (a) dan (c) untuk mendapat keputusan berikut:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (15%)

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ (15%)

6. Tentukan nilai setiap kamiran berikut:

(a) $\int\limits_{y=0}^{3} \int\limits_{x=1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)\,dx\ dy$ (20%)

(b) $\int\limits_{x=1}^{2} \int\limits_{y=\sqrt{x}}^{x} \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\ dx + \int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=\sqrt{x}}^{2} \operatorname{Sin}\left(\frac{\pi x}{2y}\right) dy\ dx$ (20%)

(c) $\int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{2} xyz\ dz\ dy\ dx$ (20%)

(d) $\iint\limits_{R} \exp\ (-x^2 - y^2)\,dx\ dy$ (20%)

diberikan $R = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

(e) $\iiint\limits_{V} \frac{dx\ dy\ dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$

diberi $V = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(20%)

-ooo0ooo-

JADUAL RUMUS

1. $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

2. $\sin(\theta \pm \varnothing) = \sin\theta \cos\varnothing \pm \cos\theta \sin\varnothing$

3. $\cos(\theta \pm \varnothing) = \cos\theta \cos\varnothing \mp \sin\theta \sin\varnothing$

4. $\sin\theta + \sin\varnothing = 2\sin\frac{\theta+\varnothing}{2}\cos\frac{\theta-\varnothing}{2}$

5. $\sin\theta - \sin\varnothing = 2\cos\frac{\theta+\varnothing}{2}\sin\frac{\theta-\varnothing}{2}$

6. $\cos\theta + \cos\varnothing = 2\cos\frac{\theta+\varnothing}{2}\cos\frac{\theta-\varnothing}{2}$

7. $\cos\theta - \cos\varnothing = -2\sin\frac{\theta+\varnothing}{2}\sin\frac{\theta-\varnothing}{2}$

8. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

9. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

10. Jika $t = \tan\frac{x}{2}$, maka $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

11. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1$

12. $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

13. $\int e^x \, dx = e^x + c$

14. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

15. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

16. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin } \frac{x}{a} + C$

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{ arc tan } \frac{x}{a} + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \text{arc sinh } \frac{x}{a} + C$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{arc cosh } \frac{x}{a} + C$