UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang 1991/92

Mac/April 1992

EUM 101 - Matematik Kejuruteraan 1

Masa : [3 jam]

ARAHAN KEPADA CALON :

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi 10 muka surat berserta lampiran (2 muka surat) bercetak dan TUJUH (7) soalan sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab mana-mana LIMA (5) soalan. Tunjukkan kerja pengiraan dengan jelas.

Mesin hitung boleh digunakan.

Agihan markah bagi setiap soalan diberikan di sut sebelah kanan sebagai peratusan daripada markah keseluruhan bagi soalan berkenaan.

Jawab kesemua soalan dalam Bahasa Malaysia.

1. (a) Jika $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 1$, berikan rumus untuk

   (i) $f + g$;

   (ii) $f \cdot g$;

   (iii) $f \circ g$.

   Dapatkan juga nilai $(f \circ g)(2)$ dan $(g \circ f)(2)$. Apakah keputusan anda ?

   [30%]

   (b) Beri takrif yang jelas bagi pernyataan,

   "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$"

   Dengan menggunakan takrif tersebut, buktikan bahawa,

   $$\underset{x \to 1}{\text{had}}\ (x^2 - 2x + 3) = 2$$

   [30%]

   (c) Tentukan had berikut (jika wujud);

   (i) $\underset{x \to 4}{\text{had}}\ \dfrac{3x + 9}{x^2 + x - 6}$

   (ii) $\underset{x \to 0}{\text{had}}\ \dfrac{1 - \cos(2x)}{x^2}$

   (iii) $\underset{x \to a}{\text{had}}\ \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$

   (iv) $\underset{x \to 1}{\text{had}}\ \dfrac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x}}{x^2 - 1}$

   [40%]

2. (a) Di beri,

$$f(t) = \begin{cases} t^2 & , t \geq -1 \\ 2t^2 + kt + 3 & , t < -1 \end{cases}$$

Tentukan nilai k supaya f(t) selanjar pada t = -1.

[30%]

(b) Dapatkan $\frac{dy}{dx}$ dan $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika ;

(i) $x^2 + 3xy + y^2$;

(ii) $e^{x-y} - 2x = 0$.

[30%]

(c) Tenaga upaya dari satu atom ke satu atom yang lain diberi oleh model,

$$E = \frac{A}{S^{12}} - \frac{B}{S^6} \qquad (A, B > 0).$$

S ialah jarak pemisahan di antara atom. Carilah S , supaya $\frac{dE}{dS} = 0$ (keseimbangan pemisahan).

Seterusnya tunjukkan bahawa $\frac{d^2E}{dS^2} > 0$ pada nilai S tersebut.

[40%]

3. (a) Jika $f(x,y) = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x$, Tunjukkan bahawa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

[30%]

(b) Katakan, $W = F\left(\frac{yZ}{x^2}\right)$ dan $F(u)$ fungsi boleh beza terhadap u.

Tunjukkanbahawa bagi $x \neq 0$,

$$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + Z\frac{\partial w}{\partial Z} = 0$$

[30%]

(c) Kontraktor yang membina roket silinder bagi NASA telah diberitahu bahawa dimensi roket perlu ditukar sedikit. Panjangnya perlu ditambah dari 100m ke 105m dan jejari roket itu perlu dikurangkan dari 20m ke 19m. Isipadu roket silinder itu diberi oleh model,

$$V(L,r) = \pi r^2 L\ ,$$

L ialah panjang roket itu dan r ialah jejari roket itu. Dapatkan ralat relatif bagi isipadu roket itu?.

[40%]

4. (a) Selesaikan setiap kamiran tak tentu berikut:

(i) $\int x \sqrt{x+1}\, dx$

(ii) $\int x e^{x^2} dx$

(iii) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

[30%]

(b) Katakan,

$I_n = \int x^n \operatorname{Cos} x \, dx \quad , n = 0, 1, 2, \ldots$

Tunjukkan bahawa rumus ini boleh diturunkan menjadi,

$I_n = x^n \operatorname{Sin} x + n x^{n-1} \operatorname{Cos} x - n(n-1) I_{n-2}$,

$n = 0, 1, 2, \ldots\ldots$

Nilaikan $\int x^3 \operatorname{Cos} x \, dx$.

[40%]

(c) Syarikat pengeluar besi waja, PEWAJA di Trengganu mengeluarkan dua jenis gred besi, A dan B. Keuntungan bulanan, $u(g_1 g_2)$ dalam ribu ringgit diterangkan oleh model,

$$u(g_1 g_2) = 2g_1^2 + g_2^2 - g_1 g_2$$

g_1 mewakili bilangan unit besi bagi gred A dan

g_2 mewakili bilangan unit besi bagi gred B.

Katakan dengan kemampuan yang ada sekarang ini, syarikat itu boleh mengeluarkan 148 unit besi setiap bulan. Berapakah bilangan unit besi bagi setiap gred yang sepatutnya dikeluarkan oleh syarikat itu, supaya syarikat itu mendapat keuntungan bulanan yang maksimum ?

[30%]

5. (a) Tentukan siri-siri berikut, menumpu atau mencapah atau bukan kedua-duanya;

(i) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}$$

(ii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

(iii) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + \text{Cos } n}{n^3}$$

[30%]

(b) Carilah nilai x supaya siri,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)}{n^2} x^n \qquad \text{menumpu}$$

[30%]

(c) Fungsi f(t) ialah fungsi berkala dengan kalaan 2π.
Siri Fourier bagi f(t) ditakrifkan oleh,

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \text{ Cos } nt + b_n \sin nt)$$

dengan,

$$a_o = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \text{ Cos } nt\, dt \quad , n = 1,2,3,\ldots$$

dan

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \quad , n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Katakan f(t) ialah fungsi berkala dengan kalaan 2π dan diberi oleh,

$$f(t) = t^4 \quad , -\pi \leq t \leq \pi \quad ,$$

Carilah siri Fourier bagi f(t) tersebut.

[40%]

6. (a) Diberi,

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 15$$

Carilah titik-titik genting bagi fungsi di atas, dan tentukan nilai maksimum atau minimum tempatan atau titik lengkuk balas (jika wujud). Lakarkan graf bagi fungsi tersebut dengan memberikan selang-selang bagi fungsi itu menokok, menyusut, cekung ke atas dan cekung ke bawah.

[50%]

(b) Nilaikan,

(i) $\int_1^e x^2 \ln x \, dx$

(ii) $\int_0^1 \frac{e^x}{2 + e^x} \, dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{Sin} 2x}{1 + \operatorname{Cos}^2 x} \, dx$

[30%]

(c) Carilah isipadu yang terkandung di antara permukaan,

$$f(x, y) = \sqrt{1 + x + y}$$

dan rantau segiempat dalam satah x - y yang ditakrifkan oleh ketaksamaan $2 \leq x \leq 7$ dan $0 \leq y \leq 1$.

[20%]

7. (a) Terangkan kaedah Newton untuk mendapatkan penghampiran punca bagi suatu persamaan.

Dengan menggunakan kaedah Newton, dapatkan penghampiran punca bagi persamaan,

$$x^4 + 5x - 3 = 0$$

yang terletak di antara x = 0 dan x = 1. Berikan jawapan anda tepat kepada tiga titik perpuluhan.

[40%]

(b) Carilah dan kelaskan semua titik genting bagi fungsi,

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y$$

[30%]

(c) Carilah nilai maksimum bagi fungsi,

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + y^3$$

yang dikenakan kekangan,

$$x^2 + 3y^2 = 1$$

[30%]

-oooOooo-

LAMPIRAN

JADUAL RUMUS

1. $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

2. $\sin(\theta \pm \varnothing) = \sin\theta\cos\varnothing \pm \cos\theta\sin\varnothing$

3. $\cos(\theta \pm \varnothing) = \cos\theta\cos\varnothing \mp \sin\theta\sin\varnothing$

4. $\sin\theta + \sin\varnothing = 2\sin\frac{\theta+\varnothing}{2}\cos\frac{\theta-\varnothing}{2}$

5. $\sin\theta - \sin\varnothing = 2\cos\frac{\theta+\varnothing}{2}\sin\frac{\theta-\varnothing}{2}$

6. $\cos\theta + \cos\varnothing = 2\cos\frac{\theta+\varnothing}{2}\cos\frac{\theta-\varnothing}{2}$

7. $\cos\theta - \cos\varnothing = -2\sin\frac{\theta+\varnothing}{2}\sin\frac{\theta-\varnothing}{2}$

8. $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

9. $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

10. If $t = \tan\frac{x}{2}$, then $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$

11. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$

12. $\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$

13. $\int e^x\,dx = e^x + c$

14. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

15. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

16. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

17. $\int \tan x \, dx = \log |\sec x| + C$

18. $\int \sec x \, dx = \log |\sec x + \tan x| + C$

19. $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$

20. $\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{arc sin} \frac{x}{a} + C$

22. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \text{arc tan} \frac{x}{a} + C$

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \text{arc sinh} \frac{x}{a} + C$

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{arc cosh} \frac{x}{a} + C$