

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Kursus Semasa Cuti Panjang
Sidang Akademik 2003/2004

April 2004

MAT 111 – Aljabar Linear

Masa : 3 jam

ARAHAN KEPADA CALON

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **EMPAT [4]** soalan di dalam **EMPAT [4]** halaman muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab **SEMUA** soalan.

1. (a) Andai $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ dan

$B =$ bentuk eselon baris terturun (B.E.B.T) A

- (i) Cari matriks-matriks baris permulaan (M.B.P) E_1, E_2, E_3 sedemikian hingga $B = E_3 E_2 E_1 A$.
- (ii) Cari matriks-matriks baris permulaan (M.B.P) E_4, E_5, E_6 sedemikian hingga $A = E_6 E_5 E_4 B$

[20 markah]

- (b) (i) Cari semua nilai k yang memenuhi persamaan

$$\begin{bmatrix} k & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

- (ii) Tunjukkan bahawa jika matriks A mempunyai suatu baris sifar dan B ialah sebarang matriks supaya AB tertakrif, maka AB juga mempunyai suatu baris sifar.

[50 markah]

- (c) Cari semua nilai bagi a, b, c dan d jika C adalah simetri pencong.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2a - 3b + c & 3a - 5b + 5c \\ -2 & 0 & 5a - 8b + 6c \\ -3 & -5 & d \end{bmatrix}$$

[30 markah]

2. (a) Cari nilai-nilai a supaya sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

menghasilkan

- (i) sistem tak konsisten
 (ii) bilangan penyelesaian yang tak terhingga banyaknya
 (iii) penyelesaian unik

[40 markah]

(b) Diberi

$$D = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- (i) Tunjukkan bahawa $|D| = 0$ tanpa melakukan pengiraan penentu tersebut.
 (ii) Cari nilai x yang menyebabkan F tak singular jika

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ x & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

[40 markah]

- (c) (i) Tunjukkan bahawa jika A tak singular, maka $|A^{-1}BA| = |B|$.
 (ii) Tunjukkan bahawa A tak singular jika hanya jika $A^T A$ tak singular.

[20 markah]

3. (a) (i) Tunjukkan bahawa set V yang mengandungi semua matriks 2×2 berbentuk

$$\begin{bmatrix} a & a-b \\ a-b & b \end{bmatrix}$$

adalah subruang $M_{2 \times 2}$.

- (ii) Cari asas bagi V dari (i), dan nyatakan dimensinya.

[30 markah]

(b) Diberi $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $b = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tentukan sama ada b berada dalam ruang vektor yang direntang oleh v_1, v_2, v_3 dan v_4 atau tidak.

[40 markah]

- (c) Kita katakan bahwa $V = \text{Span}(\{v_1, v_2, v_3\})$ jika V adalah ruang vector yang direntang oleh vektor-vektor v_1, v_2 dan v_3

Andai

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$$

dan

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix} \right\}$$

Tunjukkan bahwa $V=W$.

[Petunjuk: Gunakan ruang baris]

[30 markah]

4. (a) Andai $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ merentang V .

- (i) Jika $w \in V$, tunjukkan bahwa $\{w, v_1, v_2, \dots, v_m\}$ adalah berdasar linear dan merentang V .
 (ii) Jika v_i adalah gabungan linear dari $\{v_1, v_2, \dots, v_{i-1}\}$ maka S tanpa v_i merentang V .

[30 markah]

- (b) Biar

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

- (i) Cari semua nilai eigen dan vektor eigen yang bersepadan.
 (ii) Cari matriks P dan D sedemikian hingga P tak singular dan $D = P^{-1}AP$ adalah matriks pepenjur.

[40 markah]

- (c) Andai B adalah matriks $n \times n$ yang terpepenjurukan dan B tak singular tunjukkan bahwa

- (i) B^T terpepenjurukan
 (ii) B^2 terpepenjurukan
 (iii) B^{-1} terpepenjurukan.

[30 markah]