

JIM 418/4 – Aljabar Moden

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **ENAM** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah dan markah subsoalan diperlihatkan dipenghujung subsoalan itu.

1. (a) Katakan A dan B adalah dua set. Buktikan bahawa

(i) $A - B = A \Rightarrow B - A = B.$

(ii) $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B \Rightarrow A \cap B = \phi.$

(20 markah)

(b) Satu hubungan H ditakrifkan atas \mathbb{Z} dengan $xHy \Leftrightarrow x - y$ boleh dibahagikan oleh 3. Tentukan sama ada H ialah suatu hubungan kesetaraan atas \mathbb{Z} atau tidak.

Cari $[x]H$.

(40 markah)

(c) Cari semua integer x yang memenuhi $6x \equiv 29 \pmod{77}.$

(20 markah)

(d) Katakan fungsi $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ditakrifkan oleh $x\alpha = x^2 - 3x + 2.$

Tentukan sama ada α satu-ke-satu atau menyeluruh.

(20 markah)

2. (a) Katakan $*$ ialah operasi atas \mathbb{R} yang ditakrifkan oleh

$$a * b = a + b - 2 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Adakah operasi ini

(i) kalis tukar tertib.

(ii) kalis sekutuan.

Tentukan sama ada identitinya wujud atau tidak.

(30 markah)

(b) Katakan $\langle G, * \rangle$ adalah suatu kumpulan yang mempunyai 10 unsur. Buktikan bahawa wujud $a \in G$ yang bukan identiti dan memenuhi $a * a = e$. Di sini e adalah identiti.

(30 markah)

(c) Katakan $G = \{e, a, b\}$ dan operasi $*$ ditakrifkan atas G dengan

$*$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	e	a
b	b	b	e

Tentukan sama ada $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan atau tidak.

(20 markah)

(d) Katakan $\langle G, * \rangle$ suatu kumpulan dan e ialah identiti bagi G . Buktikan bahawa jika

$$a * b * a^{-1} * b^{-1} = e, \quad \forall a, b \in G$$

maka G adalah Abelian.

(20 markah)

3. (a) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan Abelian dengan identiti e dan H ditakrifkan oleh

$$H = \{x \in G \mid x^2 = e\}.$$

Tunjukkan bahawa H adalah suatu subkumpulan bagi G .

(30 markah)

- (b) Katakan $\langle G, * \rangle$ ialah suatu kumpulan dan $a \in G$. Jika $O(a) = n$,
buktikan

$$O(a^r) = \frac{n}{[n, r]},$$

di sini r ialah suatu integer positif dan $[n, r] =$ pembahagi sepunya terbesar bagi n dan r .

(30 markah)

- (c) Katakan $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ adalah

dua pilihatur bagi S_6 . Cari

- (i) $\alpha\beta$.
- (ii) peringkat α dan peringkat β .
- (iii) $\alpha^{101} \beta^{101}$.

(20 markah)

- (d) Katakan $G = \{a, a^2, a^3, \dots, a^{28} = e\}$ suatu kumpulan kitaran dengan $|G| = 28$. Cari peringkat bagi a^6 , a^{16} dan semua penjana bagi G .

(20 markah)

4. (a) Senaraikan semua unsur dalam A_4 dan cari semua koset kanan bagi A_4 dalam S_4 .

(40 markah)

...5/-

(b) Katakan \mathbb{R} set semua nombor nyata. Tentukan sama ada fungsi-fungsi berikut adalah endomorfisma atas $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ atau tidak:

(i) $xf = x + 2$.

(ii) $xg = |x|$.

(iii) $xh = 3x$.

(30 markah)

(c) Katakan ϕ homomorfisma dari kumpulan $\langle G, * \rangle$ ke kumpulan $\langle H, o \rangle$.

Buktikan bahawa

(i) jika e dan f adalah identiti bagi G dan H masing-masing, maka $e\phi = f$.

(ii) $\forall a \in G, (a\phi)^{-1} = a^{-1}\phi$.

(30 markah)

5. (a) Katakan $\langle H, +, \times \rangle$ suatu gelanggang. Bagi $\forall a, b, c \in H$, buktikan bahawa

(i) $a \times 0 = 0 \times a = 0$.

(ii) $a \times (-b) = -(a \times b) = (-a) \times b$.

(iii) $(-a) \times (-b) = a \times b$.

(iv) $(b - c) \times a = (b \times a) - (c \times a)$.

(40 markah)

- (b) Katakan \mathbb{R} ialah set semua nombor nyata manakala $+$, \times masing-masing adalah penambahan dan pendaraban biasa. Dua operasi \oplus dan \otimes ditakrifkan oleh

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \otimes b = a \times b + a + b.$$

Buktikan

- (i) $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ adalah suatu gelanggang.
(ii) $\langle \mathbb{R}, \oplus, \otimes \rangle$ adalah isomorfisma dengan $\langle \mathbb{R}, +, \times \rangle$.

(60 markah)

- ooo0ooo -