UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MSG 356 – Mathematical Programming
[Pengaturcaraan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SEVEN pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TUJUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua lapan** [8] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Consider the following nonlinear function on the given set *S*:

$$f(x) = \ln x - 2x^2, \quad S = (0, \infty)$$

(a) Determine whether $f(x)$ is convex, concave, or neither on *S*.

(b) Find the local extremum of $f(x)$.

(c) What is the minimum value of $f(x)$ for $0.25 \leq x \leq 0.75$?

[25 marks]

1. Pertimbangkan fungsi tak-linear berikut pada set S yang diberikan:

$$f(x) = \ln x - 2x^2, \quad S = (0, \infty)$$

(a) Tentukan sama ada $f(x)$ *cembung, cekung, atau bukan pada S.*

(b) Cari ekstremum tempatan bagi $f(x)$.

(c) Apakah nilai minimum untuk $f(x)$ *bagi* $0.25 \leq x \leq 0.75$*?*

[25markah]

2. A company produces two models (A and B) of a certain product using three types of raw material (I, II and III), of which 300, 200 and 400 units are available, respectively. The raw material requirements per unit of the two models are given in the table below.

	Requirements per Unit of Given Model	
Raw Material	A	B
I	4	1
II	3	3
III	2	5

The labour time for each unit of model A is three times that of model B. The entire labour force of the factory can produce the equivalent of 500 units of model A. A market survey indicates that the minimum demand for the two models is 30 and 20, respectively. If the company produces x_1 units of model A and x_2 units of model B, then it can charge RM$(900 - 2x_1)$/unit and RM$(800 - x_2)$/unit of the models A and B, respectively. The fixed cost of production is RM3,000.

Formulate the problem as a nonlinear programming model to determine the number of units of each model that will maximize profit.

[15 marks]

2. *Sebuah syarikat menghasilkan dua model (A dan B) produk tertentu menggunakan tiga jenis bahan mentah (I, II dan III), yang mana masing-masing 300, 200 dan 400 unit disediakan. Keperluan bahan mentah seunit bagi dua model tersebut diberikan dalam jadual di bawah.*

	Keperluan Setiap Unit Model	
Bahan Mentah	*A*	*B*
I	*4*	*1*
II	*3*	*3*
III	*2*	*5*

Masa tenaga kerja bagi setiap unit model A adalah tiga kali masa tenaga kerja bagi model B. Daya keseluruhan tenaga kerja kilang adalah setara dengan penghasilan 500 unit model A. Suatu kajian pasaran menunjukkan bahawa permintaan minimum bagi kedua-dua model adalah 30 dan 20, masing-masing. Jika syarikat itu menghasilkan x_1 *unit model A dan* x_2 *unit model B, maka ia boleh mengenakan bayaran* $RM(900-2x_1)$ */ unit bagi model A dan* $RM(800-x_2)$ */ unit bagi model B. Kos tetap pengeluaran ialah RM3,000.*

Rumuskan masalah sebagai model pengaturcaraan tak-linear untuk menentukan bilangan unit setiap model yang akan memaksimumkan keuntungan.

[15 markah]

3. Consider the following nonlinear programming problem:

$$\text{Maximize} \quad f(x,y) = -5x^2 + 6x - 2y^2 + 5y$$
$$(x, y) \in R^2$$

(a) Perform two iterations of the method of steepest ascent to approximate the optimal solution to the problem. Begin at point (0, 2).

(b) Find the exact solution to the problem and compare it with the result you obtained in (a).

[30 marks]

3. *Pertimbangkan masalah pengaturcaraan tak-linear berikut:*

$$\textit{Maksimumkan} \quad f(x,y) = -5x^2 + 6x - 2y^2 + 5y$$
$$(x, y) \in R^2$$

(a) Lakukan dua lelaran kaedah pendakian tercuram untuk menganggarkan penyelesaian optimum kepada masalah ini. Mulakan pada titik (0, 2).

(b) *Cari penyelesaian yang tepat kepada masalah ini dan bandingkan dengan keputusan yang anda perolehi dalam (a).*

[30 markah]

4. Consider the problem:

Maximize $f(x_1, x_2, x_3) = - \ x_1 - 2 \ ^2 - \ x_2 - 1 \ ^2 - x_3^2 + \ x_1 x_3 + \ x_2 x_3$

subject to $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10$

$(x_1, x_2, x_3) \in R^3$

Use Lagrange multipliers to estimate the change in the optimal value of $f(x_1, x_2, x_3)$ if the right hand side of the second constraint is increased by 0.05.

[30 marks]

4. *Pertimbangkan masalah:*

Maksimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = - \ x_1 - 2 \ ^2 - \ x_2 - 1 \ ^2 - x_3^2 + \ x_1 x_3 + \ x_2 x_3$

terhadap $2x_1 + 3x_2 + x_3 = 8$

$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 10$

$(x_1, x_2, x_3) \in R^3$

Gunakan pendarab Lagrange untuk menganggar perubahan dalam nilai optimum $f(x_1, x_2, x_3)$ *jika nilai sebelah kanan kekangan kedua meningkat sebanyak 0.05.*

[30 markah]

5. Consider the following nonlinear programming problem:

Maximize $f(x, y) = -5x^2 + 6x - 2y^2 + 5y$

subject to $2x + y \leq 3$

$x + 3y \leq 4$

(a) Determine whether $(x, y) = (0.6, 1.25)$ is the optimal solution to the problem. If it is not, find the optimal solution using the Kuhn-Tucker conditions.

(b) Suppose the right hand side of the constraint $x+3y \le 4$ is changed from 4 to 4.01. Estimate the new optimal value of $f(x,y)$.

[25 marks]

5. *Pertimbangkan masalah pengaturcaraan tak-linear berikut:*

Maksimumkan $f(x,y) = -5x^2 + 6x - 2y^2 + 5y$

terhadap $2x + y \le 3$

$x + 3y \le 4$

(a) *Tentukan sama ada* $(x, y) = (0.6, 1.25)$ *merupakan penyelesaian optimum kepada masalah ini. Jika ia bukan, cari penyelesaian optimum menggunakan syarat-syarat Kuhn-Tucker.*

(b) *Katakan sebelah kanan kekangan* $x+3y \le 4$ *ditukar daripada 4 kepada 4.01. Anggarkan nilai optimum baru* $f(x,y)$.

[25 markah]

6. Your father is considering investing RM10,000 in three stocks. Let R_i be the random variable representing the annual return on RM1 invested in stock *i* (*i* = 1, 2, 3). Hence, if R_i = 0.10, RM1 invested in stock *i* at the beginning of a year would be worth RM1.10 at the end of the year. You have the following information:

$$E(R_1) = 0.15,\ E(R_2) = 0.12,\ E(R_3) = 0.18,$$
$$Var(R_1) = 0.12,\ Var(R_2) = 0.10,\ Var(R_3) = 0.25,$$
$$Cov(R_1, R_2) = 0.05,\ Cov(R_1, R_3) = 0.07,\ Cov(R_2, R_3) = 0.04.$$

. Formulate a quadratic programming model that can be used to help him find the portfolio that attains an expected annual return of at least 16% and minimize the variance of the annual return on the portfolio.

[25 marks]

6. *Ayah anda sedang mempertimbangkan untuk melabur RM10,000 dalam tiga saham. Biar* R_i *sebagai pemboleh ubah rawak mewakili pulangan tahunan bagi RM1 yang dilaburkan dalam saham i (i = 1, 2, 3). Oleh itu, jika* R_i *= 0.10, RM1 dilaburkan dalam saham i pada awal tahun akan bernilai RM1.10 pada akhir tahun. Anda mempunyai maklumat berikut:*

$$E(R_1) = 0.15,\ E(R_2) = 0.12,\ E(R_3) = 0.18,$$

$$Var(R_1) = 0.12,\ Var(R_2) = 0.10,\ Var(R_3) = 0.25\ ,$$
$$Cov(R_1, R_2) = 0.05,\ Cov(R_1, R_3) = 0.07,\ Cov(R_2, R_3) = 0.04\ .$$

Rumuskan model pengaturcaraan kuadratik yang boleh digunakan untuk membantu ayah anda mendapatkan portfolio yang mencapai jangkaan pulangan tahunan sekurang-kurangnya 16% dan meminimumkan varians pulangan tahunan atas portfolio.

[25 markah]

7. Solve the following problem by geometric programming:

Minimize $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{-2}x_2x_3^{2} + x_1^{-1}x_2^{2}x_3^{-2} + 3x_1^{2}x_2^{-1} + 2x_1^{-3}x_3$

where $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$.

[25 marks]

7. Selesaikan masalah berikut dengan pengaturcaraan geometri:

Minimumkan $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{-2}x_2x_3^{2} + x_1^{-1}x_2^{2}x_3^{-2} + 3x_1^{2}x_2^{-1} + 2x_1^{-3}x_3$

yang mana $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0$.

[25 markah]

8. A company needs to develop a replacement policy for its 1-year-old machine over the next 5 years. A machine must be kept in service for at least 2 years and must be disposed of after 5 years. The current purchase price of a machine is RM8,000 and increases by RM600 a year. The salvage value of a 1-year-old machine is RM6,000 and decreases by RM500 a year. The operating cost of a machine during its first year of service is RM600 but is expected to increase by RM100 a year.

Determine the optimal replacement policy of the machine over the next 5 years using dynamic programming.

[25 marks]

8. *Sebuah syarikat perlu membangunkan polisi gantian untuk mesin berusia 1 tahun dalam tempoh 5 tahun akan datang. Sebuah mesin mesti disimpan dalam perkhidmatan selama sekurang-kurangnya 2 tahun dan mesti dilupuskan selepas 5 tahun. Harga belian semasa mesin adalah RM8,000 dan meningkat sebanyak RM600 setahun. Nilai lupus mesin berusia 1 tahun ialah RM6,000 dan berkurangan sebanyak RM500 setahun. Kos operasi mesin semasa tahun pertama perkhidmatan adalah RM600 tetapi dijangka meningkat sebanyak RM100 setahun.*

   Tentukan dasar penggantian optimum mesin dalam tempoh 5 tahun akan datang menggunakan pengaturcaraan dinamik.

[25 markah]

- ooo O ooo -