
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MAT 202 – Introduction to Analysis
[Pengantar Analisis]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

[Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) State the definitions of supremum and infimum of a non-empty set in $\mathbf{R}$.
Next, show that if the supremum and the infimum exist, they must be unique.
- (b) Let $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$. Find the infimum and the supremum of the set A .
Next, using the Archimedean principle, show that there does not exist such a number, $m < 1$ as an upper bound of the set A .
- (c) State the completeness axiom. Let $T = -x : x \in S = -S$, where the set S is a non-empty set which is bounded below. Show that the set S has an infimum.
- (d) Show that every subset of a countable set is countable. Next, show that the set of all rational numbers, $\mathbf{Q}$ is a countable set.
- (e) Show that the set of all real numbers, $\mathbf{R}$ is not countable. Using this fact, show that the set of all irrational numbers is not countable.

[10 marks]

1. (a) Takrifkan supremum dan infimum suatu set tak kosong pada $\mathbf{R}$. Seterusnya, tunjukkan jika supremum dan infimum wujud, ianya adalah unik.
- (b) Biarkan $A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbf{N} \right\}$ Cari infimum dan supremum set A . Seterusnya, dengan menggunakan prinsip Archimedean, tunjukkan tidak wujud sebarang number $m < 1$ sebagai batas atas set A .
- (c) Nyatakan aksiom Kelengkapan. Biarkan $T = -x : x \in S = -S$, yang mana set S adalah set tak kosong yang terbatas dari bawah. Tunjukkan bahawa set S mempunyai infimum.
- (d) Tunjukkan bahawa setiap subset kepada set yang terbilangkan adalah terbilangkan. Seterusnya, tunjukkan bahawa set semua nombor nisbah, $\mathbf{Q}$ adalah set yang terbilangkan.
- (e) Tunjukkan bahawa set semua nombor nyata, $\mathbf{R}$ adalah terbilangkan. Menggunakan fakta ini, tunjukkan set semua nombor tak nisbah adalah tidak terbilangkan.

[100 markah]

2. (a) State the definition for a convergent sequence. Using this definition, show that the sequence $\left\{ \frac{2+5n}{8+11n} \right\}$ converges.
- (b) State the definition for Cauchy sequence. Using this definition show that the sequence $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ is a Cauchy sequence.
- (c) Show that every Cauchy sequence is a convergent sequence. Is the converse true? If yes, prove it. If no, give an example to disprove it.
- (d) Let $a_n, n=1,2,3,\dots$ be a sequence in the extended real number set. Define $y_n = \sup_{k \geq n} a_k$ and $z_n = \inf_{k \geq n} a_k$. Show that $\overline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n$.
- (e) Define a uniformly continuous function f on an interval I . Next show that every uniformly continuous function on an interval is continuous on that interval. Is the converse true? If yes, prove it. If no, give an example to disprove it.

[100 marks]

2. (a) Takrifkan jujukan menumpu. Dengan menggunakan takrifan ini, tunjukkan bahawa jujukan $\frac{2+5n}{8+11n}$ adalah menumpu.
- (b) Takrifkan jujukan Cauchy. Dengan menggunakan takrifan ini, tunjukkan bahawa jujukan $\left\{ \frac{n+1}{n} \right\}$ adalah jujukan Cauchy.
- (c) Tunjukkan bahawa setiap jujukan Cauchy adalah jujukan menumpu. Adakah akasnya benar? Jika ya, maka buktikan dan jika sebaliknya, berikan satu contoh untuk menyangkal.
- (d) Biarkan $a_n, n=1,2,3,\dots$ suatu jujukan nombor nyata yang diperluaskan. Takrifkan $y_n = \sup_{k \geq n} a_k$ dan $z_n = \inf_{k \geq n} a_k$. Tunjukkan bahawa $\overline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n$.
- (e) Takrifkan suatu fungsi yang selanjat secara seragam pada selang I . Seterusnya, tunjukkan bahawa setiap fungsi yang selanjat secara seragam pada suatu selang juga adalah selanjat pada selang tersebut. Adakah akasnya benar? Jika ya, buktikan dan jika sebaliknya, berikan satu contoh untuk menyangkal.

[100 markah]

3. (a) Define the following type of points on $\mathbf{R}$:

- (i) Interior point.
- (ii) Limit point.
- (iii) Isolated point.
- (iv) Boundary point.

Next, for the set $A = [-4, 12) \setminus \mathbf{Q}$, find each of the above type of point on $\mathbf{R}$ for A (if it exists).

(b) Define a compact set on $\mathbf{R}$. Show that if a set of real number is compact, then, that set is bounded. Given the open interval $(0, 1)$, determine whether this set is compact, and give your reason.

(c) Define a disconnected set. Give an example of a disconnected set. Next, given a continuous function $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, where the set A is a connected set and let

$$\inf \{ f(x) : x \in A \} < w < \sup \{ f(x) : x \in A \},$$

show that there exists $c \in A$ such that $f(c) = w$.

(d) Let $\{f_n\}$ be a bounded sequence of functions on a set A that converges to a function f on A . Define $R_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$. Show that if $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, $\{f_n\}$ converges uniformly to f on A .

(e) Using the fact from (d), show that the sequence $\{f_n\}$ defined as $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ and $x \in \mathbf{R}$, converges uniformly on $\mathbf{R}$.

[100 marks]

3. (a) Takrifkan jenis-jenis titik berikut:

- (i) Titik pedalaman
- (ii) Titik had
- (iii) Titik terpencil
- (iv) Titik Sempadan

(b) Takrifkan set padat pada $\mathbf{R}$. Tunjukkan bahawa jika suatu set nombor nyata adalah padat maka set tersebut adalah terbatas. Diberikan selang terbuka $(0, 1)$, tentukan sama ada set ini adalah padat, dan berikan alasan anda.

(c) Takrifkan set tak-terkait. Berikan satu contoh set tak-terkait. Seterusnya, diberikan satu fungsi selangar $f: A \rightarrow \mathbf{R}$, yang mana set A adalah set terkait dan biarkan

$$\inf \{ f(x) : x \in A \} < w < \sup \{ f(x) : x \in A \},$$

tunjukkan bahawa wujud $c \in A$ supaya $f(c) = w$.

- (d) Biarkan $\{f_n\}$ suatu jujukan fungsi yang terbatas pada set A yang menumpu kepada suatu fungsi f pada A . Takrifkan $R_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$. Tunjukkan bahawa jika $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, $\{f_n\}$ menumpu secara seragam kepada f pada A .
- (e) Dengan menggunakan fakta dari (d), tunjukkan bahawa jujukan $\{f_n\}$ yang ditakrifkan sebagai $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ dan $x \in \mathbf{R}$, menumpu secara seragam pada $\mathbf{R}$.

[100 markah]