
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MAT 111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -9 & -27 & -81 \end{bmatrix}$.

- Determine the solution to the linear system $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -243 & 1 & 1 & 1 & 243 \end{bmatrix}^T$, and write it in the form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, where $\mathbf{x}_p$ is a particular solution to the given non-homogeneous system, and $\mathbf{x}_h$ is a solution to the associated homogeneous system, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Find the reduced row echelon form of A .
- If someone tells you that A is non-singular, use the result from part (a) or any other method to prove or disprove his statement.
- Based on your result in parts (a) and (b), find the bases for the column space and the null space of A .
- Show that the null space of A^T is the orthogonal complement of the column space of A in part (d).

[100 marks]

1. Andaikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -9 & -27 & -81 \end{bmatrix}$.

- Tentukan penyelesaian kepada sistem linear $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -243 & 1 & 1 & 1 & 243 \end{bmatrix}^T$, dan tulis penyelesaian tersebut dalam bentuk $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, dengan $\mathbf{x}_p$ adalah suatu penyelesaian khusus kepada sistem tak homogen yang diberikan, dan $\mathbf{x}_h$ adalah suatu penyelesaian kepada sistem homogen sekutu $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Tentukan bentuk eselon baris terturun A .
- Sekiranya seseorang memberitahu kamu yang A adalah tak singular, guna keputusan daripada bahagian (a) atau sebarang kaedah lain untuk membuktikan atau menyangkal kenyataannya.
- Berdasarkan kepada keputusan yang kamu perolehi dalam bahagian (a) dan (b), cari asas-asas untuk ruang lajur dan ruang nol bagi A .
- Tunjukkan bahawa ruang nol bagi A^T adalah pelengkap ortogon bagi ruang lajur A dalam bahagian (d).

[100 markah]

2. (a) Let $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ be defined by $L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ -x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

- (i) Show that L is a linear transformation.
- (ii) Find the standard matrix representing L .
- (iii) Find kernel of L .
- (iv) Is L invertible? If it is, define L^{-1} . If not, then justify your answer.

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

- (i) Show that $\lambda = 4$ and $\lambda = 10$ are eigenvalues of A . Thus, find bases for the associated eigenspaces.
- (ii) State the characteristic polynomial of A .
- (iii) Find a non-singular matrix P so that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix.

[100 marks]

2. (a) Andaikan $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ditakrifkan oleh $L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 \\ -x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

- (i) Tunjukkan bahawa L adalah suatu transformasi linear.
- (ii) Dapatkan suatu matriks piawai yang mewakili L .
- (iii) Cari inti bagi L .
- (iv) Adakah L tersongsangkan? Jika ya, takrifkan L^{-1} . Jika tidak, justifikasikan jawapan anda.

(b) Andaikan $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

- (i) Tunjukkan bahawa $\lambda = 4$ dan $\lambda = 10$ adalah nilai eigen bagi A . Dengan demikian, cari asas-asas untuk ruang-ruang eigen sekutu.
- (ii) Nyatakan polinomial cirian bagi A .
- (iii) Cari suatu matriks tak singular P supaya $P^{-1}AP$ adalah suatu matriks pepenjuru.

[100 markah]

3. (a) Let V be a real vector space where $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ are any vectors in V such that $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ is defined as an inner product on V .
- (i) Verify that $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$, where $\|\mathbf{u}\|$ and $\|\mathbf{v}\|$ are the lengths of vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$, respectively.
- (ii) Using the result in part (i), show that $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ and $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
- (iii) If $\mathbf{u}$ is a fixed vector in V , prove that the set of all vectors that are orthogonal to $\mathbf{u}$ is a subspace of V .

(b) If $P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ represents a transition matrix from an ordered basis

$T = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ to another ordered basis $S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, find

- (i) T , if $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, and $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- (ii) S , if $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, and $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[100 marks]

3. (a) Andaikan V adalah suatu ruang vektor nyata dengan $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah sebarang vektor dalam V supaya $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ditakrifkan sebagai hasil darab terkedalam pada V .
- (i) Tentusahkan bahawa $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2$, dengan $\|\mathbf{u}\|$ dan $\|\mathbf{v}\|$ masing-masingnya adalah panjang vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$.
- (ii) Dengan menggunakan keputusan dalam bahagian (i), tunjukkan bahawa $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ dan $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 4(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.
- (iii) Jika $\mathbf{u}$ adalah suatu vektor tetap dalam V , buktikan bahawa set kesemua vektor yang ortogon dengan $\mathbf{u}$ adalah suatu subruang bagi V .

(b) Jika $P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mewakili matriks peralihan daripada suatu asas

bertertib $T = \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ kepada $S = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, asas bertertib yang lain, cari

(i) T , jika $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(ii) S , jika $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, dan $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[100 markah]

4. (a) Let $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

- (i) Determine whether S is a basis of $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Use the Gram-Schmidt process to determine an orthonormal basis for $\text{span } S$ with the standard inner product defined on it.
- (iii) Find the orthogonal complement of $W = \text{span } S$.

(b) Find the QR-factorization of $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

[100 marks]

4. (a) Andaikan $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.

- (i) Tentukan sama ada S adalah suatu asas bagi $\mathbb{R}^3$.
- (ii) Guna proses Gram-Schmidt untuk menentukan suatu asas ortonormal untuk rentang S dengan hasil darab terkedalam piawai ditakrif padanya.
- (iii) Dapatkan pelengkap ortogon bagi $W = \text{rentang } S$.

(b) Dapatkan pemfaktoran-QR bagi $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

[100 markah]