UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MSS 211 - Modern Algebra
[Aljabar Moden]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all six** [6] questions.

*[Arahan: Jawab **semua enam** [6] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

(1) (a) Let S be the set of even integers. Is S a group under addition?
(b) Do the odd permutations in S_n form a group? Why?
(c) Determine whether $G = \langle 6\mathbb{Z}, +\rangle$ is cyclic.
(d) Give an example of a group which is abelian but not cyclic.
(e) Show that $\mathbb{Z}_p$ has no proper nontrivial subgroup if p is a prime number.

[15 marks]

(1) (a) Biar S suatu set integer genap. Adakah S suatu kumpulan di bawah penambahan?
(b) Adakah pilihatur ganjil dalam S_n membentuk suatu kumpulan? Mengapa?
(c) Tentukan sama ada $G = \langle 6\mathbb{Z}, +\rangle$ adalah kitaran.
(d) Beri satu contoh kumpulan yang abelan tapi tak kitaran.
(e) Tunjukkan bahawa $\mathbb{Z}_p$ tidak mempunyai subkumpulan tak remeh yang tak wajar jika p adalah suatu nombor perdana.

[15 markah]

(2) (a) Consider the groups $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$ and C_8. Are any two of these groups isomorphic? Explain.
(b) Up to isomorphism, find all abelian groups of order 540.

[15 marks]

(2) (a) Pertimbangkan kumpulan-kumpulan $C_2 \times C_2 \times C_2$, $C_2 \times C_4$ dan C_8. Adakah sebarang dua daripada kumpulan-kumpulan tersebut berisomorfik? Jelaskan.
(b) Dapatkan semua kumpulan abelan berperingkat 540 yang tidak berisomorfik.

[15 markah]

(3) Let $S_3 = \langle (1\,2\,3), (1\,2)\rangle$.

(a) List all the elements of S_3.
(b) Is S_3 cyclic? Verify your answer.
(c) Is S_3 abelian? Verify your answer.
(d) Give H, a normal subgroup of S_3.
(e) List all the elements in S_3/H.
(f) Is S_3 isomorphic to D_3 or C_6? Verify your answer.

[18 marks]

(3) Biar $S_3 = \langle (1\,2\,3), (1\,2)\rangle$.

(a) Senaraikan semua unsur bagi S_3.
(b) Adakah S_3 kitaran? Tentusahkan jawapan anda.

(c) Adakah S_3 abelan? Tentusahkan jawapan anda.
(d) Berikan H, suatu subkumpulan normal bagi S_3.
(e) Senaraikan semua unsur dalam S_3/H.
(f) Adakah S_3 berisomorfik dengan D_3 atau C_6? Tentusahkan jawapan anda.

[18 markah]

(4) Determine whether the following statements are true or false. Justify your answer.

(a) If m divides the order of a finite group G, then G has a subgroup of order m.
(b) Every subgroup of a cyclic group is a normal subgroup.
(c) The order of $(8, 10)$ in $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ is 9.
(d) Every element of a cyclic group generates the group.
(e) Every field is a ring.
(f) The characteristic of $n\mathbb{Z}$ is n.

[18 marks]

(4) Tentukan sama ada pernyataan berikut adalah benar atau palsu. Justifikasikan jawapan anda.

(a) Jika m membahagi peringkat bagi suatu kumpulan terhingga G, maka G mempunyai suatu subkumpulan berperingkat m.
(b) Setiap subkumpulan bagi kumpulan kitaran adalah subkumpulan normal.
(c) Peringkat bagi $(8, 10)$ dalam $\mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{18}$ ialah 9.
(d) Setiap unsur bagi suatu kumpulan kitaran menjana kumpulan tersebut.
(e) Setiap medan adalah suatu gelanggang.
(f) Cirian bagi $n\mathbb{Z}$ adalah n.

[18 markah]

(5) (a) Let $\langle R, +\rangle$ be an abelian group. Show that $\langle R, +, \cdot\rangle$ is a ring if $a \cdot b = 0$ for all $a, b \in R$.

(b) Let $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ be a ring.

(i) Is R commutative?
(ii) Does R have unity?
(iii) Give all units of R.
(iv) Find the characteristic of R.
(v) Is R a field? Verify your answer.

[20 marks]

(5) *(a)* *Biar* $\langle R, +\rangle$ *suatu kumpulan abelan. Tunjukkan bahawa* $\langle R, +, \cdot\rangle$ *adalah suatu gelanggang jika* $a \cdot b = 0$ *bagi semua* $a, b \in R$.

(b) *Biar* $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *suatu gelanggang.*

(i) *Adakah* R *kalis tukar tertib?*

(ii) *Adakah* R *mempunyai uniti?*

(iii) *Berikan semua unit bagi* R.

(iv) *Dapatkan cirian bagi* R.

(v) *Adakah* R *suatu medan? Tentusahkan jawapan anda.*

[20 markah]

(6) (a) Show that $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ and $\langle 2\mathbb{Z}, +\rangle$ are isomorphic under the map $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ with $\phi(x) = 2x$ for all $x \in \mathbb{Z}$. Is ϕ a ring isomorphism? Verify your answer.

(b) Give an example of a ring having two elements a and b such that $ab = 0$ but neither a nor b is zero.

[14 marks]

(6) *(a)* *Tunjukkan bahawa* $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ *dan* $\langle 2\mathbb{Z}, +\rangle$ *adalah isomorfik di bawah pemetaan* $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *dengan* $\phi(x) = 2x$ *bagi semua* $x \in \mathbb{Z}$. *Adakah* ϕ *suatu isomorfisma gelanggang? Tentusahkan jawapan anda.*

(b) *Beri satu contoh suatu gelanggang yang mempunyai dua unsur* a *dan* b *sedemikian hingga* $ab = 0$ *tetapi* a *dan* b *bukan sifar.*

[14 markah]

- ooo O ooo -