
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MGM 502 – Number Theory
[Teori Nombor]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FOUR pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi EMPAT muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all eight** [8] questions.

[Arahan: Jawab **semua lapan** [8] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Given $f(x) = x^3 + 3x + 4$.
 - (i) Find all roots of $f(x) = 0$ using Cardano's formula.
 - (ii) By using the factor theorem, find the real root of $f(x) = 0$.
 - (iii) Hence find the positive integers a and b such that

$$a + \sqrt[3]{b} + a - \sqrt[3]{b} = 1.$$

[15 marks]

1. Diberikan $f(x) = x^3 + 3x + 4$.
 - (i) Cari semua punca $f(x) = 0$ menggunakan rumus Cardano.
 - (ii) Dengan menggunakan teorem faktor, cari punca nyata bagi $f(x) = 0$.
 - (iii) Dengan demikian, cari integer positif a dan b supaya

$$a + \sqrt[3]{b} + a - \sqrt[3]{b} = 1.$$

[15 markah]

2. State Peano's Axiom and the definition of addition in $\mathbb{N}$. Hence, use this definition to prove the associative property of addition on $\mathbb{N}$.

[10 marks]

2. Nyatakan Aksiom Peano dan takrifan penambahan dalam $\mathbb{N}$. Dengan demikian, gunakan takrifan ini untuk membuktikan hukum kalis sekutuan dipatuhi oleh penambahan atas $\mathbb{N}$.

[10 markah]

3. Define divisibility on $\mathbb{N}$. Hence, prove or disprove the following:

(a) $1|a \quad \forall a \in \mathbb{N}$.

(b) $a|0 \quad \forall a \in \mathbb{N}$.

(c) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}, a|b \text{ and } c|d \Rightarrow (a+c)|(b+d)$.

[10 marks]

3. Takrifkan pembahagian atas $\mathbb{N}$. Dengan demikian, buktikan atau sangkalkan kenyataan berikut:

(a) $1|a \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$

(b) $a|0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$

(c) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad a|b \text{ dan } c|d \Rightarrow (a+c)|(b+d).$

[10 markah]

4. (a) Define primes.

(b) Given that m and n are integers such that $m+n$ and mn are primes, find $m+n^{mn} + (mn)^{m+n}.$

(c) Find three primes whose sum equals a seventh of their product.

[15 marks]

4. (a) Takrifkan nombor perdana.

(b) Diberikan m dan n merupakan integer sedemikian hingga $m+n$ dan mn merupakan nombor perdana, cari $m+n^{mn} + (mn)^{m+n}.$

(c) Cari tiga nombor perdana supaya hasil tambah mereka merupakan satu pertujuh hasil darab mereka.

[15 markah]

5. Given $a=49507127$ and $b=58252151$, find (a,b) and write it in the form $\alpha a + \beta b$ for some integers α and β . Hence solve the Diophantine equation $ax + by = 9848$.

[15 marks]

5. Diberikan $a=49507127$ dan $b=58252151$, cari (a,b) dan tuliskannya dalam bentuk $\alpha a + \beta b$ bagi integer α dan β . Dengan demikian selesaikan persamaan Diophantine $ax + by = 9848$.

[15 markah]

6. (a) Find the number of positive factors of 11200 and the sum of all these factors.

(b) Given $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ where p, q, r, s are distinct primes and $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, find the smallest possible value of n if it has exactly 1155 positive factors.

[12 marks]

6. (a) Cari bilangan faktor positif bagi 11200 serta hasil tambah semua faktor ini.
- (b) Diberikan $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$, dengan p, q, r, s nombor perdana, dan $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$, cari nilai terkecil mungkin bagi n sekiranya ia mempunyai tepat 1155 faktor positif.

[12 markah]

7. (i) Find the remainder obtained when 113247825 is divided by 11.
- (ii) Hence, find the remainder obtained when $113247825^{33652458952}$ is divided by 11.

[13 marks]

7. (i) Cari baki yang diperoleh apabila 113247825 dibahagi oleh 11.
- (ii) Dengan demikian, cari baki yang diperoleh apabila $113247825^{33652458952}$ dibahagi oleh 11.

[13 markah]

8. Solve the following system of linear congruences:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[10 marks]

8. Selesaikan sistem kongruen linear berikut:

$$2x \equiv 5 \pmod{7}$$

$$3x \equiv 4 \pmod{11}$$

$$6x \equiv 8 \pmod{13}$$

[10 markah]