
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Second Semester Examination
2012/2013 Academic Session

June 2013

MAA 111 – Algebra for Science Students
[Aljabar untuk Pelajar Sains]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. (a) Solve the linear system $A\vec{x} = \vec{b}$ using *LU – decomposition*

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= -5 \\x_2 + 3x_3 &= -1 \\2x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -20\end{aligned}$$

- (b) Given $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, find A .
- (c) True/False, if a statement is true, give a reason, if false, provide an example that shows that the statement is not true for all cases.
- (i) If A and B are $n \times n$ matrices and A is invertible, then $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$.
 - (ii) If one row of a square matrix is multiple of another row, then the determinant is 0.
 - (iii) If A can be row reduced to the identity matrix, then A is non-singular matrix.
 - (iv) The identity matrix is an elementary matrix.
 - (v) The matrix A is row equivalent to B if there exists a finite number of elementary matrices $E_1, E_2, \dots, E_k$ such that $A = E_k E_{k-1} \dots E_1 B$.

[100 marks]

1. (a) *Selesaikan sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ berikut menggunakan pemfaktoran LU*

$$\begin{aligned}x_1 - 3x_2 &= -5 \\x_2 + 3x_3 &= -1 \\2x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -20\end{aligned}$$

- (b) *Diberi $(3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, dapatkan A .*
- (c) *Betul/Salah, sekiranya sesuatu pernyataan itu betul, berikan sebab, jika pernyataan itu tidak benar, berikan satu contoh menunjukkan pernyataan itu tidak benar bagi semua kes.*
- (i) *Jika A dan B adalah matriks bersaiz $n \times n$ dan A tersongsangkan, maka $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$.*
 - (ii) *Jika satu baris pada matriks segiempat sama adalah gandaan bagi satu baris yang lain, maka penentu bagi matriks ini adalah 0.*
 - (iii) *Jika matriks A telah menjalani proses baris terturunkan hingga menjadi bentuk matriks identiti, maka A adalah matriks tak-singular.*
 - (iv) *Matriks identiti adalah suatu matriks asas.*
 - (v) *Matriks A adalah baris kesetaraan kepada matriks B sekiranya wujud matriks asas yang terhingga iaitu $E_1, E_2, \dots, E_k$ dimana $A = E_k E_{k-1} \dots E_1 B$.*

[100 markah]

2. (a) Let $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,
- (i) find the eigenvalues and bases for the eigenspaces of the matrix A ,
 - (ii) for each eigenvalue, find the rank of the matrix $(\lambda I - A)$,
 - (iii) is A diagonalizable? justify your answer,
 - (iv) compute A^{20}, A^{-100} .
- (b) Find the least squares solution of the linear system $A\vec{x} = \vec{b}$ and find the orthogonal projection of $\vec{b}$ onto the column space of A ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

[100 marks]

2. (a) Diberi $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,
- (i) carikan nilai eigen dan basis bagi ruang eigen untuk matriks A ,
 - (ii) bagi setiap nilai eigen, carikan pangkat bagi matriks $(\lambda I - A)$,
 - (iii) adakah A terpepenjurukan? Berikan alasan,
 - (iv) kirakan A^{20}, A^{-100} .
- (b) cari penyelesaian kuasa dua terkecil bagi sistem linear $A\vec{x} = \vec{b}$ berikut dan dapatkan unjuran ortogon bagi $\vec{b}$ ke atas ruang lajur A ;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

[100 markah]

3. (a) Determine whether the set S spans $\mathbb{R}^2$, if not, gives a geometric description of the subspace that it does span.
- (i) $S = \{(2,1), (-1,2)\}$.
 - (ii) $S = \{(1,3), (-2,-6), (4,12)\}$.

- (b) Determine the dimension and nullspace for the given matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- (c) Define the concept of spanning sets and linear independence for a vector space.

[100 marks]

3. (a) Tentukan samada set S merentangi $\mathbb{R}^2$, jika tidak, berikan penerangan secara geometri tentang subruang yang direntang.

(i) $S = \{(2,1), (-1,2)\}$.

(ii) $S = \{(1,3), (-2,-6), (4,12)\}$.

- (b) Tentukan dimensi dan ruang nol bagi matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- (c) Terangkan konsep set rentangan dan kebebasan linear untuk sesuatu ruang vektor.

[100 markah]

4. (a) Let A be an $m \times n$ matrix (where $m < n$) whose rank is r ,
- (i) what is the largest value r can be?,
 - (ii) how many vectors are in a basis for the row space of A ,
 - (iii) how many vectors are in a basis for the column space of A ,
 - (iv) which vector space $\mathbb{R}^k$ has the row space of A as a subspace?,
 - (v) which vector space $\mathbb{R}^k$ has the column space of A as a subspace?.
- (b) Determine the standard matrix that will produce the indicated pair of rotations 60° about the x-axis followed by 30° about the z-axis.
- (c) Find the standard matrix for $T : T_1 \circ T_2$ with

$$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, 3x),$$

$$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y + 2x).$$

[100 marks]

4. (a) Biarkan A menjadi matriks bersaiz $m \times n$ (dimana $m < n$) dan pangkatnya adalah r ,
- (i) apakah nilai maksimum bagi r yang boleh dicapai?
 - (ii) berapakah vektor yang terdapat dalam basis bagi ruang lajur matriks A ?
 - (iii) berapakah vektor yang terdapat dalam basis bagi ruang baris matriks A ?
 - (iv) ruang vektor $\mathbb{R}^k$ yang manakah mempunyai ruang baris A sebagai subruangnya?
 - (v) ruang vektor $\mathbb{R}^k$ yang manakah mempunyai ruang lajur A sebagai subruangnya?
- (b) Tentukan matriks asas yang akan menghasilkan putaran 60° pada paksi x diikuti putaran 30° pada paksi z .
- (c) Dapatkan matriks asas bagi $T : T_1 \circ T_2$ dengan
- $$T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, 3x),$$
- $$T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y + 2x).$$

[100 markah]