
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2012/2013 Academic Session

January 2013

MSG 327 – Mathematical Modelling
[Pemodelan Matematik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of EIGHT pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LAPAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all three** [3] questions.

Arahan: Jawab **semua tiga** [3] soalan].

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. Consider the following advection-dispersion equation (1) at steady state

$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - k c = 0 \tag{1}$$

with $E \text{ m}^2/\text{s}$ as dispersion coefficient, $u \text{ m/s}$ as velocity and $k \text{ s}^{-1}$ as decay rate. Equation (1) can be solved numerically by using finite segment method to obtain the chemical concentration in a uniform river. Suppose that a uniform river has cross-sectional area $A = 12.5 \text{ m}^2$, length $L = 3600 \text{ m}$, velocity $u = 0.16 \text{ m s}^{-1}$ and dispersion coefficient $E = 0.0 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. This river is divided into three uniform segments with $\Delta x = 1200 \text{ m}$ for each segment as shown in Figure 1. A chemical is released into segment 1 of the river at the rate of $W = 0.3 \text{ kg s}^{-1}$. This chemical decays at the rate of $k = 2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. The water at the upstream and downstream segments is assumed to have a chemical concentration of 0.0 kg m^{-3} .

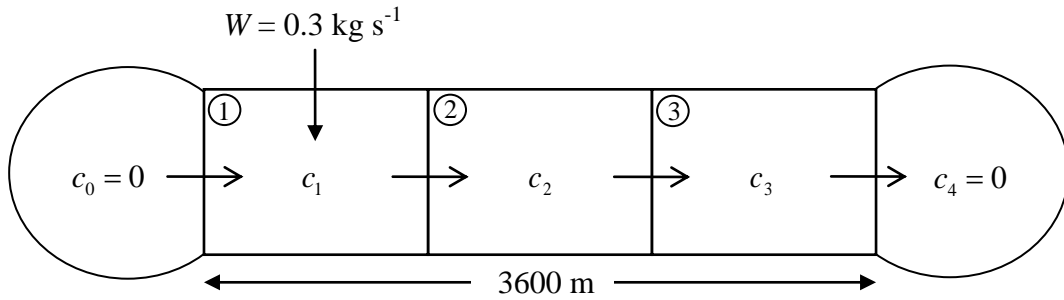


Figure 1. A uniform river divided into three segments (c_1, c_2, c_3) with upstream and downstream segments (c_0, c_4)

- (a) Find the concentration for every segment c_1, c_2, c_3 after steady state is achieved.
- (b) Suppose that segment 1 is divided into three segments with $\Delta x = 400 \text{ m}$ for each segment as shown in Figure 2. Without having to set and solve the matrix equation $A\mathbf{c} = \mathbf{w}$ as in (a), find the concentration for every segment c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 after steady state is achieved. (Hint: Use transfer coefficient/treatment factor)

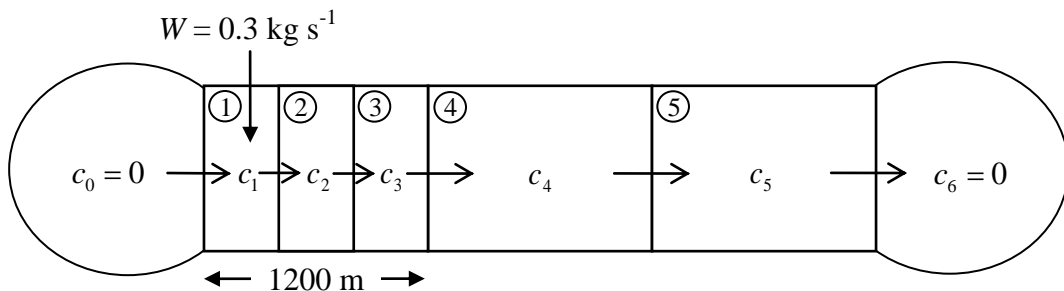


Figure 2. The river in Figure 1 divided into five segments (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) with upstream and downstream segments (c_0, c_6)

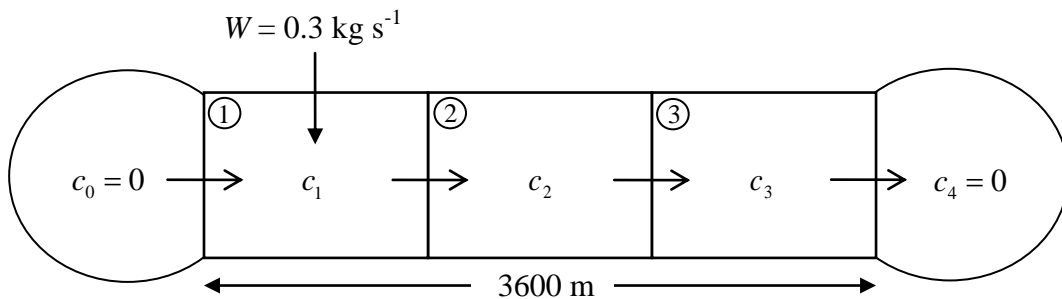
- (c) Sketch the concentrations calculated in (a) and (b) on the same figure. Suggest ways to improve the numerical calculation.
- (d) Consider the three-segment river in Figure 1. Suppose that the chemical loading is moved from segment 1 to segment 2. Sketch the spatial concentration in the river for the following dispersion coefficients.
- (i) $E = 12.8 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;
 - (ii) $E = 128 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$;
 - (iii) $E = 1280 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

[100 marks]

1. Pertimbangkan persamaan adveksi-sebaran (1) berikut pada keadaan mantap

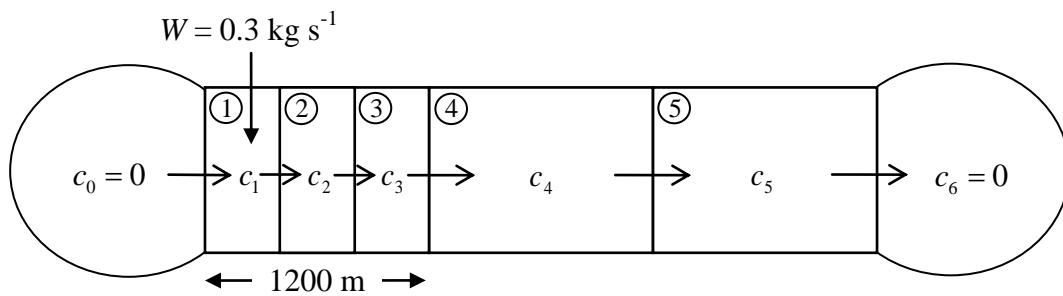
$$E \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - u \frac{\partial c}{\partial x} - k c = 0 \quad (1)$$

dengan $E \text{ m}^2/\text{s}$ sebagai pekali sebaran, $u \text{ m/s}$ sebagai halaju dan $k \text{ s}^{-1}$ sebagai kadar pereputan. Persamaan (1) boleh diselesaikan secara berangka dengan menggunakan kaedah segmen terhingga untuk mendapatkan kepekatan kimia di dalam sungai yang seragam. Katakan bahawa sungai yang seragam mempunyai luas keratan rentas $A = 12.5 \text{ m}^2$, panjang $L = 3600 \text{ m}$, halaju $u = 0.16 \text{ m s}^{-1}$ dan pekali sebaran $E = 0.0 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Sungai ini dibahagikan kepada tiga segmen seragam dengan $\Delta x = 1200 \text{ m}$ untuk setiap segmen seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 1. Suatu bahan kimia dilepaskan ke dalam segmen 1 sungai pada kadar $W = 0.3 \text{ kg s}^{-1}$. Bahan kimia ini mereput pada kadar $k = 2 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Air di segmen hulu dan hilir dianggap mempunyai kepekatan kimia 0.0 kg m^{-3} .



Rajah 1. Sungai seragam yang dibahagikan kepada tiga segmen (c_1, c_2, c_3) dengan segmen hulu dan hilir (c_0, c_4)

- (a) Cari kepekatan untuk setiap segmen c_1, c_2, c_3 selepas keadaan mantap tercapai.
- (b) Andaikan bahawa segmen 1 dibahagikan kepada tiga segmen dengan $\Delta x = 400 \text{ m}$ bagi setiap segmen seperti yang ditunjukkan dalam Rajah 2. Tanpa perlu menetapkan dan menyelesaikan persamaan matriks $A\tilde{c} = \tilde{w}$ seperti dalam (a), cari kepekatan untuk setiap segmen c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 selepas keadaan mantap tercapai. (Petunjuk: Gunakan pekali pemindahan/faktor rawatan)



Rajah 2. Sungai di dalam Rajah 1 dibahagikan kepada lima segmen (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) dengan segmen hulu dan hilir (c_0, c_6)

- (c) Lakarkan kepekatan yang dikira dalam (a) dan (b) pada rajah yang sama. Cadangkan cara-cara untuk memperbaiki pengiraan berangka tersebut.
- (d) Pertimbangkan sungai tiga-segmen dalam Rajah 1. Katakan bahawa pelepasan kimia dipindahkan dari segmen 1 ke segmen 2. Lakarkan kepekatan reruang di dalam sungai untuk pekali sebaran berikut.
- (i) $E = 12.8 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$;
- (ii) $E = 128 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$;
- (iii) $E = 1280 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

[100 markah]

2. A lake with a single inflow stream has the following characteristics:

Mean depth, $H = 4$ m

Surface area, $A_s = 10 \times 10^6$ m²

Water residence time, $\tau_w = 5$ years

A nearby factory presently discharges a chemical at the rate of $W = 1500 \times 10^6$ g/yr into the lake. In addition, the inflowing stream also contains 12 mg/L of the chemical. Note that the volumetric rate of inflow and outflow are equal. Assuming that a first-order decay reaction can be used to characterize the chemical decay ($k = 0.1$ yr⁻¹):

- (a) Write a mass-balance equation for chemical for this system. Define all notations used in the equation and their unit. Derive the steady-state concentration for this system.
- (b) If the lake is in steady-state, compute the in-lake chemical concentration.
- (c) If the lake is in steady-state, what factory loading rate must be maintained to lower the lake's concentration to 50 mg/L? Express your result as a percent reduction.
- (d) Evaluate each of the following engineering options to determine which is the most effective for lowering the steady-state concentration:
 - (i) Reduce the present loading rate of the factory by building a waste treatment facility that will remove 50 % of the chemical from the factory's effluent.
 - (ii) Double the lake's depth by dredging.
 - (iii) Double the lake's outflow rate Q by diverting chemical-free water from a nearby unpolluted stream into the lake.

[100 marks]

2. Satu tasik dengan satu aliran masuk mempunyai ciri-ciri berikut:

Kedalaman purata, $H = 4 \text{ m}$

Luas permukaan, $A_s = 10 \times 10^6 \text{ m}^2$

Masa takungan air, $\tau_w = 5 \text{ tahun}$

Sebuah kilang berdekatan kini melepaskan bahan kimia pada kadar $W = 1500 \times 10^6 \text{ g/thn}$ ke dalam tasik. Di samping itu, aliran masuk air juga mengandungi 12 mg/L bahan kimia tersebut. Perhatikan bahawa kadar isipadu aliran masuk dan keluar adalah sama. Dengan mengandaikan bahawa reaksi pereputan tertib pertama boleh digunakan untuk mencirikan pereputan bahan kimia ($k = 0.1 \text{ thn}^{-1}$):

- (a) Tuliskan persamaan keseimbangan jisim bagi bahan kimia untuk sistem ini. Takrifkan semua notasi yang digunakan dalam persamaan dan unit mereka. Terbitkan kepekatan keadaan mantap untuk sistem ini.
- (b) Jika tasik tersebut berada pada keadaan mantap, kira kepekatan kimia dalam tasik.
- (c) Jika tasik tersebut berada pada keadaan mantap, berapakah kadar pelepasan bahan kimia dari kilang yang mesti dikekalkan untuk menurunkan kepekatan tasik ke 50 mg/L ? Nyatakan keputusan anda sebagai peratus pengurangan.
- (d) Nilaikan setiap pilihan kejuruteraan berikut untuk menentukan yang manakah yang paling berkesan untuk mengurangkan kepekatan pada keadaan mantap:
 - (i) Kurangkan kadar pelepasan semasa dari kilang dengan membina kemudahan rawatan sisa yang akan mengeluarkan 50% bahan kimia dari efluen kilang.
 - (ii) Ganda duakan kedalaman tasik dengan pengorekan.
 - (iii) Ganda duakan kadar aliran keluar tasik Q dengan melencongkan air bebas bahan kimia dari anak sungai berhampiran yang tidak tercemar ke dalam tasik.

[100 markah]

3. Consider a completely-mixed lake containing $V = 10000 \text{ m}^3$ of water with initial BOD concentration $\ell_0 = 15 \text{ mg/L}$ and initial DO concentration $c_0 = 6 \text{ mg/L}$. The BOD decay rate is $\alpha = 0.3 \text{ day}^{-1}$ and DO reaeration rate is $\beta = 0.9 \text{ day}^{-1}$ with DO saturation level $c_s = 7.5 \text{ mg/L}$.
- (a) Using the given notations, formulate the differential equations describing the temporal changes in BOD and DO concentrations in the lake.
 - (b) Solve the differential equations formulated in (a) for BOD and DO concentrations at time t .
 - (c) Sketch the time series of BOD and DO concentrations on the same figure. What are the BOD and DO concentrations at steady state?
 - (d) Now assume that wastewater from a nearby residential area with BOD concentration $\ell_w = 10 \text{ mg/L}$ flows into the lake at the flow rate of $Q = 864 \text{ m}^3/\text{d}$. Revise the differential equations in (a) to include this BOD input.
 - (e) Solve the differential equations formulated in (d) and sketch the solutions on the same figure. What are the BOD and DO concentrations at steady state?
 - (f) Now assume that the lake algae photosynthesis and respiration contribute to the change in the concentration of DO in a manner shown in Figure 3. Revise the differential equations in (d) to include the DO contribution from algae photosynthesis and respiration.
 - (g) Assume that BOD concentration has achieved steady state at $\ell_t = 9 \text{ mg/L}$. Solve the differential equation formulated in (f) if $\delta = 20 \text{ mg/L/d}$. What is the range of DO concentrations at steady state?

[100 marks]

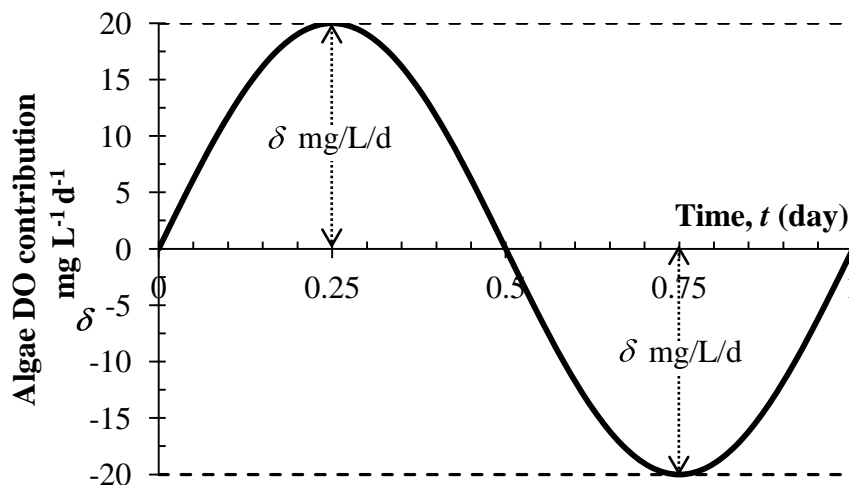
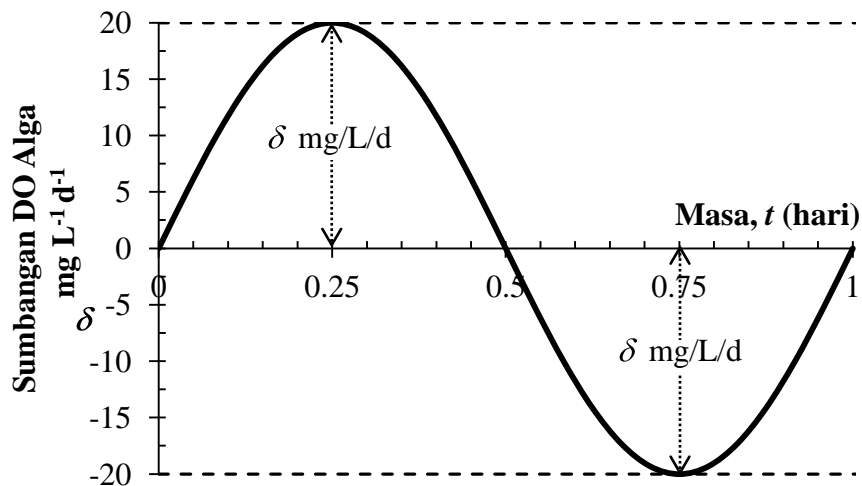


Figure 3. Algae photosynthesis and respiration

3. Pertimbangkan tasik campuran lengkap yang mengandungi $V = 10000 \text{ m}^3$ air dengan kepekatan awal BOD $\ell_0 = 15 \text{ mg/L}$ dan kepekatan awal DO $c_0 = 6 \text{ mg/L}$. Kadar pereputan BOD ialah $\alpha = 0.3 \text{ hari}^{-1}$ dan kadar pengudaraan semula DO ialah $\beta = 0.9 \text{ hari}^{-1}$ dengan paras tepu DO $c_s = 7.5 \text{ mg/L}$.
- (a) Dengan menggunakan notasi yang diberikan, rumuskan persamaan pembezaan yang menerangkan perubahan dari segi masa dalam kepekatan BOD dan DO dalam tasik.
 - (b) Selesaikan persamaan pembezaan yang dirumuskan pada (a) untuk kepekatan BOD dan DO pada masa t .
 - (c) Lakarkan siri masa kepekatan BOD dan DO pada rajah yang sama. Apakah kepekatan BOD dan DO pada keadaan mantap?
 - (d) Sekarang andaikan bahawa air kumbahan dari kawasan perumahan berdekatan dengan kepekatan BOD $\ell_w = 10 \text{ mg/L}$ mengalir ke dalam tasik pada kadar aliran $Q = 864 \text{ m}^3/\text{d}$. Rumuskan semula persamaan pembezaan dalam (a) bagi mengambil kira input BOD ini.
 - (e) Selesaikan persamaan pembezaan yang dirumuskan dalam (d) dan lakarkan penyelesaian pada rajah yang sama. Apakah kepekatan BOD dan DO pada keadaan mantap?
 - (f) Sekarang andaikan bahawa fotosintesis dan respirasi alga dalam tasik menyumbang kepada perubahan kepekatan DO dengan cara yang ditunjukkan dalam Rajah 3. Rumuskan semula persamaan pembezaan dalam (d) bagi mengambil kira sumbangan DO dari fotosintesis dan respirasi alga.
 - (g) Andaikan bahawa kepekatan BOD telah mencapai keadaan mantap pada $\ell = 9 \text{ mg/L}$. Selesaikan persamaan pembezaan yang dirumuskan dalam (f) jika $\delta = 20 \text{ mg/L/d}$. Apakah julat kepekatan DO pada keadaan mantap?

[100 markah]



Rajah 3. Fotosintesis dan respirasi alga