
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2012/2013 Academic Session

January 2013

MST 562 – Stochastic Processes
[Proses Stokastik]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

[Arahan: Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. A random variable T is uniformly distributed on the interval $(0,1]$. Another random variable U is selected according to a uniform distribution on $(0, T]$. Find the cumulative distribution function $F_U(u)$ for the random variable U .

[10 marks]

1. *Pembolehubah rawak T tertabur secara seragam pada selang $(0,1]$. Suatu pembolehubah rawak lain U dipilih menurut taburan seragam pada $(0, T]$. Dapatkan fungsi taburan longgokan $F_U(u)$ bagi pembolehubah rawak U .*

[10 markah]

2. Operations 1, 2 and 3 are performed in succession on a major piece of equipment. Operation k , where $k = 1, 2, 3$, takes a random amount of time T_k , which is exponentially distributed with parameter λ_k . All operation times, T_k , are independent. Let $X(t)$ denote the operation being performed at time t , with time $t=0$ marking the start of the first operation. If $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$ and $\lambda_3 = 10$, determine $P_n(t) = P\{X(t) = n\}$.

[10 marks]

2. *Operasi 1, 2, dan 3 dijalankan secara berturutan ke atas suatu peralatan utama. Operasi k , dengan $k = 1, 2, 3$, memakan masa selama suatu tempoh rawak T_k , yang tertabur secara eksponen dengan parameter λ_k . Semua tempoh masa operasi, T_k , adalah tak bersandar. Andaikan $X(t)$ mewakili operasi yang dijalankan pada masa t , dengan $t=0$ menandakan permulaan operasi pertama. Jika $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$ dan $\lambda_3 = 10$, tentukan $P_n(t) = P\{X(t) = n\}$.*

[10 markah]

3. Consider a Poisson process $N(t)$ with rate $\lambda > 0$.
 - (i) For $s \leq t$ non-negative and n a non-negative integer, determine $E[N(s) | N(t) = n]$ and hence, $E[N(s) | N(t)]$.
 - (ii) In case of $s < t$, find $P[N(s) = k | N(t) = n]$ and hence determine $E[N(s) | N(t) = n]$.
 - (iii) If S_n denotes the time of the n^{th} arrival, compute $E[S_4 | N(1) = 3]$.

[15 marks]

3. Pertimbangkan suatu proses Poisson $N(t)$ dengan kadar $\lambda > 0$.
- (i) Bagi $s \geq t$ tak negatif dan n suatu integer tak negatif, tentukan $E[N(s) | N(t) = n]$ dan seterusnya, $E[N(s) | N(t)]$.
 - (ii) Bagi kes $s < t$, dapatkan $P[N(s) = k | N(t) = n]$ dan seterusnya, tentukan $E[N(s) | N(t) = n]$.
 - (iii) Jika S_n mewakili masa ketibaan yang ke- n , hitung $E[S_4 | N(1) = 3]$.

[15 markah]

4. An individual has 3 umbrellas which he uses in going from his home to his office and vice versa. If he is at home (the office) at the beginning (end) of the day and it is raining, then he will take an umbrella with him to the office (home), provided there is one to be taken. If it is not raining, then he never takes an umbrella. Assume that, independent of the past, it rains at the beginning (end) of a day with probability 0.3. Let X_n denotes the number of umbrellas the individual has for his use before he begins his n th trip. (It doesn't matter whether the trip is from home to office or the reverse.)
- (i) Show that $X_n, n \geq 0$ is a Markov chain and find its transition probability matrix.
 - (ii) Classify all the states and find their periods.
 - (iii) Find $P(X_1 = 1, X_2 = 3 | X_0 = 3)$.
 - (iv) Find the limiting probabilities.
 - (v) What fraction of the time does the individual get wet? (Note: He gets wet if it is raining and all umbrellas are at the other location.)

[30 marks]

4. Seorang individu mempunyai 3 kaki payung yang digunakan bila ke pejabat dari rumah dan sebaliknya. Jika ia di rumah (di pejabat) pada awal (akhir) hari dan hari sedang hujan, ia akan membawa sekaki payung dengannya ke pejabat (rumah), dengan syarat ada payung untuk dibawa. Jika hari tidak hujan, ia tidak akan membawa payung. Andaikan bahawa kebarangkalian hujan pada awal (akhir) hari ialah 0.3 dan kebarangkalian ini tidak bergantung kepada peristiwa sebelumnya. Andaikan X_n mewakili bilangan payung yang ada pada individu tersebut untuk digunakan sebelum ia memulakan perjalanannya yang ke- n . (Sama ada perjalanan tersebut ialah dari rumah ke pejabat atau sebaliknya tidak menjadi hal.)

- (i) Tunjukkan bahawa $X_n, n \geq 0$ ialah suatu rantai Markov dan dapatkan matriks kebarangkalian peralihannya.
- (ii) Klasifikasikan semua keadaan dan dapatkan tempohnya.
- (iii) Dapatkan $P(X_1 = 1, X_2 = 3 | X_0 = 3)$.
- (iv) Dapatkan semua kebarangkalian penghad.
- (v) Apakah pecahan masa individu tersebut kebasahan? (Nota: Dia kebasahan jika hari hujan dan semua payung berada di lokasi berlainan.)

[30 markah]

5. Consider a branching process $X_i, i=0,1,2,\dots$, starting with one particle $X_0 = 1$. The distribution of the number of offspring, Z , from one particle is:

$$P(Z = i) = \frac{2^i}{3^{i+1}} p^i (1-p)^{2-i}, \text{ for } i = 0, 1, 2 \text{ and } 0 < p < 1.$$

- Find $E(Z)$ and $E(X_i)$ for $i = 0, 1, 2$.
- Calculate the extinction probability of this population.

[10 marks]

5. Pertimbangkan proses stokastik $X_i, i=0,1,2,\dots$, bermula dengan satu zarah $X_0 = 1$. Taburan bilangan anak, Z , dari satu zarah ialah:

$$P(Z = i) = \frac{2^i}{3^{i+1}} p^i (1-p)^{2-i}, \text{ for } i = 0, 1, 2 \text{ dan } 0 < p < 1.$$

- Dapatkan $E(Z)$ dan $E(X_i)$ bagi $i = 0, 1, 2$.
- Hitung kebarangkalian kepupusan bagi populasi ini.

[10 markah]

6. Consider a queueing system with a single server. Let $X(t)$ denote the number of customers in this system at time t . Potential customers arrive according to a Poisson process at rate λ and join the system with probability $1/(k+1)$, where k is the number of customers already in the system. Assume that the service time is exponentially distributed with mean $1/\mu$ and is independent of the arrivals.

- Let $P_{ij}(h) = P\{X(t+h) = j \mid X(t) = i\}$. Write down $P_{ij}(h)$ for small values of h .
- Specify the birth and death rates for the process $X(t)$.
- Determine the stationary distribution for $X(t)$.
- Determine P_0 , the proportion of time that the system is empty in the long run.

[20 marks]

6. Pertimbangkan suatu sistem giliran dengan pelayan tunggal. Andaikan $X(t)$ mewakili bilangan pelanggan yang berada dalam sistem pada masa t . Bakal pelanggan tiba menurut suatu proses Poisson pada kadar λ dan menyertai sistem dengan kebarangkalian $1/(k+1)$, dengan k sebagai bilangan pelanggan yang telah berada dalam sistem. Andaikan masa layan tertabur secara eksponen dengan min $1/\mu$ dan tak bersandar dengan ketibaan.

- Andaikan $P_{ij}(h) = P\{X(t+h) = j \mid X(t) = i\}$. Tuliskan $P_{ij}(h)$ bagi nilai h kecil.
- Nyatakan kadar kelahiran dan kadar kematian bagi proses $X(t)$.
- Tentukan taburan pegun bagi $X(t)$.
- Tentukan P_0 , iaitu kadaran masa sistem tersebut kosong dalam jangka masa panjang.

[20 markah]

7. The lifetime of a machine is exponential with a mean of 1 year. When the machine fails, an emergency unit automatically takes over the production. The unit breaks down after exactly 2 months, after which the whole system (i.e. the machine and emergency unit) is immediately replaced by a new one. This so-called unplanned replacement costs RM1400.
- (i) At what rate is the system replaced?
 - (ii) Determine the long-run average cost per year.

In order to prevent unplanned replacements, the system is regularly inspected by a technician. An inspection costs RM200. If the machine is still working, nothing is done (the system is still as good as new); otherwise, the technician immediately replaces the whole system, but this preventive replacement costs RM600, much cheaper than an unplanned replacement. Assume that the technician makes an inspection exactly 10 months after the last event, where an event is either an inspection or an unplanned replacement.

- (iii) What is the mean time between two successive events?
- (iv) Compute the long-run average cost per year.

[15 marks]

7. *Hayat sebuah mesin tertabur secara eksponen dengan min 1 tahun. Apabila mesin tersebut gagal, sebuah unit kecemasan mengambil alih pengeluaran secara automatik. Unit tersebut akan gagal setelah tepat 2 bulan beroperasi dan keseluruhan sistem (iaitu mesin dan unit kecemasan) langsung digantikan dengan sistem baru dengan segera. Kos penggantian yang tak dirancang ini ialah RM1400.*
- (i) Apakah kadar penggantian sistem tersebut?*
 - (ii) Tentukan kos purata jangka panjang setiap tahun.*

Untuk mengelak penggantian tak dirancang, sistem tersebut diperiksa oleh seorang juruteknik secara berkala. Kos suatu pemeriksaan ialah RM200. Jika mesin masih berfungsi, tiada tindakan diambil (sistem tersebut seperti baru); jika tidak, juruteknik akan menggantikan keseluruhan sistem. Kos penggantian pencegahan ialah RM600, yang jauh lebih murah daripada kos penggantian tak dirancang. Andaikan juruteknik tersebut membuat pemeriksaan setiap 10 bulan selepas suatu peristiwa berlaku, yang mana suatu peristiwa ialah pemeriksaan atau penggantian tak dirancang.

- (iii) Berapakah min masa di antara dua peristiwa berturutan?*
- (iv) Hitung kos purata jangka panjang setiap tahun.*

[15 markah]

APPENDIX

1. $X \sim \text{Poisson}(\lambda), \lambda > 0$: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$
2. $X \sim \text{geometric}(p), \quad 0 < p < 1$: $P(X = x) = p(1-p)^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$
3. $X \sim \text{Binomial}(n, p), \quad 0 < p < 1$: $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$
4. $X \sim \text{exponential}(\lambda), \quad \lambda > 0$: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$
5. $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta), \quad \alpha > 0 \text{ and } \beta > 0$: $f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0$
6. $X \sim \text{normal}(\mu, \sigma^2), \quad \mu \text{ and } \sigma^2 > 0$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x-\mu^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$
7. $X \sim \text{uniform}(a, b)$: $f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a < x < b$
8. Formula of geometric series: $\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r} \quad ; \quad |r| < 1$