
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2012/2013 Academic Session

January 2013

MAT 263 – Probability Theory
[Teori Kebarangkalian]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

Arahan: Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let the probability density function of X be

—

(a) Find $E(X)$ and $Var(X)$. [5 marks]

(b) Given that $F(x)$ is the cumulative distribution function of X , show that

[4 marks]

(c) Let T be the future lifetime of the newborn. What is the probability of the newborn dying before 50 years old given that she survives at age 20?

[3 marks]

1. Biarkan fungsi ketumpatan kebarangkalian bagi X sebagai

—

(a) Cari $E(X)$ dan $Var(X)$. [5 markah]

(b) Diberi bahawa $F(x)$ adalah fungsi kebarangkalian melonggok bagi X , tunjukkan bahawa

[4 markah]

(c) Biarkan T menjadi tempoh hayat hadapan bagi bayi yang baru lahir, apakah kebarangkalian bagi bayi yang baru lahir itu mati sebelum 50 tahun jika diberi ia hidup pada umur 20 tahun?

[3 markah]

2. The lifetime of a printer, , costing RM 360 has exponential distribution with mean 2 years. The manufacturer agrees to pay a full refund to a buyer if the printer fails during the first year after it is purchased.

(a) Find the probability that the printer fails during the first year. [3 marks]

(b) What is the expected cost that the manufacturer has to pay to the buyer if the printer fails during the first year after it is purchased? [3 marks]

(c) If 10 printers have been sold, what is the probability that the manufacturer has to pay if three or less printers fail during the first year? [3 marks]

(d) If the manufacturer sells 50 printers, using normal approximation, calculate the probability that the total refund is more than RM 8,500. [7 marks]

2. *Jangka hayat bagi suatu mesin pencetak, , yang berharga RM 360 mempunyai taburan eksponen dengan min 2 tahun. Pengeluar bersetuju mengembalikan semua wang semula kepada pembeli sekiranya mesin pencetak itu gagal berfungsi dalam tahun pertama selepas pembeliannya.*

(a) *Cari kebarangkalian bahawa mesin pencetak itu gagal berfungsi dalam tahun pertama.* [3 markah]

(b) *Apakah jangkaan kos pengeluar itu perlu membayar kepada pembeli tersebut jika mesin pencetak itu gagal berfungsi dalam tahun pertama selepas pembeliannya?* [3 markah]

(c) *Jika 10 buah mesin pencetak telah dijual, apakah kebarangkalian bahawa pengeluar itu harus bayar jika tiga atau kurang pencetak gagal berfungsi dalam tahun pertama tersebut?* [3 markah]

(d) *Jika pengeluar itu menjual 50 mesin pencetak, dengan menggunakan penghampiran normal, kira kebarangkalian bahawa jumlah pengembalian wang adalah lebih daripada RM 8,500.* [7 markah]

3. Given the function of, , has

(a) Show that is a random variable. [4 marks]

(b) Find the mean of [5 marks]

(c) Let and be independent and identical distribution as above, and , find . [5 marks]

3. Diberi suatu fungsi, , mempunyai

(a) Tunjukkan bahawa adalah suatu pembolehubah rawak. [4 markah]

(b) Cari min bagi [5 markah]

(c) Biarkan dan adalah taburan tidak bersandar dan secaman seperti di atas, dan , cari . [5 markah]

4. Ahmad is a watch collector. Every month he buys the watches following the Poisson distribution, X , with mean 3. The price of the watches, Y , follows Gamma distribution such that,

- (a) Find the probability that the price of a watch he buys is more than RM 100.
[5 marks]
- (b) Let Z be the total price of the watches that Ahmad has bought during n months, such that, $Z \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Find the mean and variance of Z .
[9 marks]
- (c) Ahmad's annual salary is RM 60,000. He allocates 12.5% of his salary to satisfy his hobby. By using normal approximation of X , what is the probability that he buys the watches less than his allocated fund?
[3 marks]

4. *Ahmad adalah seorang pengumpul koleksi jam tangan. Setiap bulan dia membeli jam-jam tangan menurut taburan Poisson, X , dengan min 3. Harga jam tangan tersebut, Y , menurut taburan Gamma seperti berikut,*

- (a) *Cari kebarangkalian harga sebuah jam tangan yang dibelinya lebih daripada RM 100.*
[5 markah]
- (b) *Diberi n suatu jumlah harga jam-jam tangan yang dibeli oleh Ahmad sepanjang n bulan, yang mana, $Z \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$. Cari min dan varians bagi Z .*
[9 markah]
- (c) *Gaji tahunan Ahmad adalah RM 60,000. Beliau memperuntukkan 12.5% daripada gaji tahunannya memenuhi kehendak hobinya. Dengan menggunakan penghampiran normal bagi X , apakah kebarangkalian bahawa beliau membeli jam-jam tangannya lebih rendah daripada wang peruntukannya?*
[3 markah]

5. Let X , Y , and Z be the independent random variables which have the respective moment generating functions as follows:

$$M_A(t) = 1 - 2t^{-3}$$

$$M_B(t) = 1 - 2t^{-2.5}$$

$$M_C(t) = 1 - 2t^{-4.5}$$

Let μ , σ , and skewness coefficient, γ_1 , is defined as $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, where μ is the mean and σ is the standard deviation of X .

- (a) Calculate μ for X . [6 marks]
- (b) Find σ and finally, γ_1 . [2 marks]
- (c) Find μ_3 . [5 marks]

5. *Biarkan X , Y , dan Z adalah pemboleh-pemboleh ubah tidak bersandar dan masing-masing mempunyai fungsi penjana momen seperti berikut:*

$$M_A(t) = 1 - 2t^{-3}$$

$$M_B(t) = 1 - 2t^{-2.5}$$

$$M_C(t) = 1 - 2t^{-4.5}$$

Biarkan μ , σ , dan pekali kepencongan, γ_1 ditakrifkan sebagai $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, yang mana μ adalah min dan σ adalah sisihan piawai bagi X .

- (a) *Kira μ bagi X .* [6 markah]
- (b) *Cari σ dan akhirnya, γ_1 .* [2 markah]
- (c) *Cari μ_3 .* [5 markah]

6. A device that continuously measures and records of an activity is placed in a remote region. The time, T , represents failure of this device that is exponentially distributed with mean 3 years. Since the device will not be monitored during its first two years of service, the time to discovery of its failure is X .

(a) Plot the graph of $f(x)$ versus x . [3 marks]

(b) Determine $P(X > 5)$. [8 marks]

6. Satu alat yang mengukur rekod suatu aktiviti secara berterusan telah diletakkan ke dalam suatu kawasan kawalan. Masa, T , mewakili kegagalan alat itu berfungsi yang mana adalah tertabur secara eksponen dengan min 3 tahun. Memandangkan alat itu tidak akan dipantau dalam masa dua tahun pertama perkhidmatannya, masa untuk mengenalpasti kegagalan alat adalah X .

(a) Plot graf $f(x)$ melawan x . [3 markah]

(b) Tentukan $P(X > 5)$. [8 markah]

7. A car dealership sells 0, 1, or 2 luxury cars on any day. When selling a car, the dealer also tries to persuade the customer to buy an extended warranty for the car. Let X denotes the number of luxury cars sold in a given day, and let Y denotes the number of extended warranties sold. The joint distributions for X and Y are given as follows:-

—
—
—
—
—
—

Find

(a) $P(X=0, Y=0)$ and $P(X=1, Y=1)$, [6 marks]

(b) $P(X=2, Y=0)$, [6 marks]

(c) $P(X=0, Y=1)$ and $P(X=1, Y=2)$. [5 marks]

7. Seorang penjual kereta menjual 0, 1, atau 2 kereta mewah pada mana-mana hari. Apabila menjual sebuah kereta, wakil penjual kereta itu juga cuba untuk memujuk pelanggannya untuk melangani lanjutan jaminan bagi kereta tersebut. Biarkan X adalah bilangan kereta mewah yang dijual dalam sehari, dan Y adalah bilangan lanjutan jaminan kereta dijual. Kebarangkalian tercantum bagi X dan Y diberikan seperti berikut:-

—
—
—
—
—
—

Cari

(a) $P(X=1, Y=1)$ dan $P(X=2, Y=1)$,

[6 markah]

(b) $P(X=1, Y=0)$,

[6 markah]

(c) $P(X=0, Y=1)$ dan $P(X=1, Y=1)$.

[5 markah]

Appendix

Random Variable,	Probability distribution function,	Mean,	Variance,	Moment Generating Function,
	_____	_____	_____	_____
	-			
	_____ - _____			_____
	_____ - _____ - _____			

-ooo000ooo-