UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Pertama
2012/2013 Sidang Akademik

Januari 2013

MSS 302 Real Analysis
[Analisis Nyata]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of SIX pages of printed material before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi ENAM muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all five** [5] questions.

*[Arahan: Jawab **semua lima** [5] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai.]

1. For each statement below, prove it if it is true or give a counterexample if it is false.

   (a) If $m^*(A)+m^*(B) = m_*(A)+m_*(B)$, then the sets A and B are measurable, where m^* and m_* denote the outer and inner measures, respectively.
   (b) For a convergent sequence $\{f_n\}$ of Riemann integrable functions,
   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\, dx.$$
   (c) For a subset A of $[0,1]$, if $m^*(X) = m^*(X\cap A) + m^*(X \cap \{[0,1]\setminus A\})$ for all subset X in $[0,1]$, then A is measurable.
   (d) For a bounded set A, if $R\int_A |f| < \infty$, then $R\int_A f < \infty$.
   (e) If $m^*(A) = 0$, then A is countable.
   (f) A measurable set is also a Borel set.
   (g) If $\{f_n\}$ is a sequence of measurable functions on A and $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ almost everywhere on A, then $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm = \int_A \lim_{n\to\infty} f\, dm$.

[28 marks]

1. Untuk setiap pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh lawan jika palsu.

   (a) Jika $m^*(A)+m^*(B) = m_*(A)+m_*(B)$, maka set A dan B tersukatkan, dengan m^* dan m_* masing-masing menandakan sukatan terkeluar dan sukatan terkedalam.
   (b) Untuk jujukan menumpu $\{f_n\}$ fungsi terkamirkan secara Riemann,
   $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\, dx.$$
   (c) Untuk subset A pada $[0,1]$, jika $m^*(X) = m^*(X\cap A) + m^*(X \cap \{[0,1]\setminus A\})$ untuk semua subset X pada $[0,1]$, maka A tersukatkan.
   (d) Untuk set tersukatkan A, jika $\int_A f\, dm < \infty$, maka $\int_A |f|\, dm < \infty$.
   (e) Jika $m^*(A) = 0$, maka A terbilangkan.
   (f) Set tersukatkan juga satu set Borel.
   (g) Jika $\{f_n\}$ ialah jujukan fungsi tersukatkan pada A dan $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ hampir di mana-mana pada A, maka $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, dm = \int_A \lim_{n\to\infty} f\, dm$.

[28 markah]

2. (a) What is the outer measure m^* of a subset A of $[0,1]$?
   (b) What is the inner measure m_* of a subset A of $[0,1]$?
   (c) Give the definition of a subset A of $[0,1]$ to be measurable in terms of outer and inner measures.
   (d) If $m^*(A) + m^*([0,1] \setminus A) = 1$ for a subset A of $[0,1]$, show that A is measurable.
   (e) Show that if A is a measurable set on $[0,1]$, then its complement A^c is also measurable on $[0,1]$.

[18 marks]

2. *(a) Apakah sukatan terkeluar m^* untuk subset A pada $[0,1]$?*
   (b) Apakah sukatan terkedalam m_* untuk subset A pada $[0,1]$?
   (c) Beri takrif untuk suatu subset A tersukatkan pada $[0,1]$ dalam sebutan sukatan terkeluar dan sukatan terkedalam.
   (d) Jika $m^*(A) + m^*([0,1] \setminus A) = 1$ untuk suatu subset A pada $[0,1]$, tunjukkan bahawa A tersukatkan.
   (e) Tunjukkan bahawa jika A set tersukatkan pada $[0,1]$, maka pelengkapnya A^c juga tersukatkan pada $[0,1]$.

[18 markah]

3. A real valued function f defined on a measurable set A is said to be (Lebesgue) measurable on A if the set $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ is measurable for all real numbers α. Denote $A(f > \alpha) = \{x \in A : f(x) > \alpha\}$.

   (a) Determine whether the function f defined on $\mathbb{R}$ by
   $$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$
   is a measurable function.

   (b) Suppose that f is a measurable function on a measurable set A and α is a real constant. Show that the sets $P = \{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ and $Q = \{x \in A : f(x) = \alpha\}$ are measurable.

   (c) Prove that a constant function on $\mathbb{R}$ is measurable.

   (d) If f is measurable on A and $m(B) = 0$, show that f is measurable on $A \cup B$.

[18 marks]

3. *Suatu fungsi nyata f tertakrif pada suatu set tersukatkan A dikatakan sebagai tersukatkan (secara Lebesgue) pada A jika set $\{x \in A : f(x) > \alpha\}$ adalah tersukatkan untuk semua nombor nyata α. Tandakan $A(f > \alpha) = \{x \in A : f(x) > \alpha\}$.*

   (a) Tentukan sama ada fungsi f yang tertakrif pada $\mathbb{R}$ oleh
   $$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < 0; \\ x^2, & x \geq 0, \end{cases}$$
   adalah fungsi tersukatkan.

   (b) Andaikan f fungsi tersukatkan pada suatu set tersukatkan A dan α pemalar nyata. Tunjukkan bahawa set-set $P = \{x \in A : f(x) \leq \alpha\}$ dan $Q = \{x \in A : f(x) = \alpha\}$ adalah tersukatkan.

   (c) Buktikan bahawa fungsi pemalar pada $\mathbb{R}$ adalah tersukatkan.

   (d) Jika f tersukatkan pada A dan $m(B) = 0$, tunjukkan bahawa f tersukatkan pada $A \cup B$.

[markah]

4. (a) Prove that if f is measurable on a bounded measurable set A and $|f| \leq g$ with g is integrable, then f is integrable.
   (b) State and prove the Lebesgue Dominated Convergence Theorem.
   (c) Consider the function $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ given by $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
   (i) What is the limit f of the sequence $\{f_n\}$ on $[0, \infty)$?
   (ii) Does $\{f_n\}$ converge uniformly to 0 on $[0, \infty)$? Justify your answer.
   (iii) Why not this sequence $\{f_n\}$ contradicts the Egorov Theorem? Give your reason.

[18 marks]

4. (a) Tunjukkan bahawa jika f tersukatkan pada set terbatas tersukatkan A dan $|f| \leq g$ dengan g terkamirkan, maka f terkamirkan.
   (b) Nyatakan dan buktikan Teorem Penumpuan Terdominasi Lebesgue.
   (c) Pertimbangkan fungsi $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ yang diberi oleh $f_n(x) = \chi_{[n,n+1]}(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
   (i) Apakah had f untuk jujukan $\{f_n\}$ pada $[0, \infty)$?
   (ii) Adakah $\{f_n\}$ menumpu secara seragam ke 0 pada $[0, \infty)$? Jelaskan jawapan anda.
   (iii) Mengapa jujukan $\{f_n\}$ ini tidak bercanggah dengan Teorem Egorov? Give your reason.

[18 markah]

5. (a) Give the definition of a norm $\|\cdot\|$ on a vector space V.
   (b) (i) A subset S of a vector space V is said to be *convex* if for any two points x, y in S, the set $\{z \in V : z = tx + (1-t)y, 0 \leq t \leq 1\}$ is contained in S.
   (ii) For the vector space $\mathbb{R}^2$, determine if the function $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ given by $\|x\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, defines a norm.
   (c) For integrable functions f on $[0,1]$ (that is, $f \in L^1([0,1])$), let the norm $\|\cdot\|$ be given by $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Consider the following functions f_1 and f_2:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   (i) Find $\|f_1 - f_2\|^2$ and $\|f_1 + f_2\|^2$.
   (ii) Does this norm $\|\cdot\|$ satisfy the Paralellogram Law?
   (iii) Does this norm $\|\cdot\|$ come from an inner product? Give your reason.

[18 marks]

5. *(a) Berikan takrif untuk norma $\|\cdot\|$ suatu ruang vektor V.*
   (b) (i) Suatu subset S kepada ruang vektor V dikatakan cembung *jika untuk sebarang dua titik x, y dalam S, set $\{z \in V : z = tx + (1-t)y, 0 \leq t \leq 1\}$ terkandung dalam S.*
   (ii) Untuk ruang vektor $\mathbb{R}^2$, tentukan sama ada fungsi $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang diberi oleh $\|x\| = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, menakrifkan satu norma.
   (c) Untuk fungsi terkamirkan f pada $[0,1]$ (iaitu, $f \in L^1([0,1])$), andaikan norma $\|\cdot\|$ diberi oleh $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|\,dx$. Pertimbangkan fungsi-fungsi f_1 dan f_2 berikut:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 1, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{2}]; \\ 0, & x \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

   (i) Cari $\|f_1 - f_2\|^2$ dan $\|f_1 + f_2\|^2$.
   (ii) Adakah norm $\|\cdot\|$ ini mematuhi Hukum segiempat selari?
   (iii) Adakah norma $\|\cdot\|$ ini wujud dari suatu hasil darab terkedalam? Beri alasan anda.

[18 markah]

- ooo O ooo -