UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2012/2013 Academic Session

January 2013

MAT 111 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of NINE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEMBILAN muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all four** [4] questions.

*[**Arahan:** Jawab **semua empat** [4] soalan.]*

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Let the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine the reduced row echelon form of *A*.

(b) Find the set of all solutions to $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, and express each solution as a linear combination of two vectors in $\mathbb{R}^4$.

(c) Determine the solution to the linear system $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 & 5 \end{bmatrix}^T$, and write it in the form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, where $\mathbf{x}_p$ is a particular solution to the given non-homogeneous system, and $\mathbf{x}_h$ is a solution to the associated homogeneous system in part (b).

(d) Based on your result in part (a), find the bases for the column space and the null space of *A*.

(e) State the relationship between the rank and the nullity of *A* in part (d).

(f) Show that the null space of A^T is the orthogonal complement of the column space of A in part (d).

[100 marks]

1. *Andaikan matriks* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) *Tentukan bentuk eselon baris terturun A.*

(b) *Dapatkan set kesemua penyelesaian kepada* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *dan nyatakan setiap penyelesaian sebagai suatu gabungan linear dua vektor dalam* $\mathbb{R}^4$.

(c) *Tentukan penyelesaian kepada sistem linear* $A\mathbf{x} = \begin{matrix} 2 & 3 & 7 & 5 \end{matrix}^{T}$, *dan tulis penyelesaian tersebut dalam bentuk* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, *dengan* $\mathbf{x}_p$ *adalah suatu penyelesaian khusus kepada sistem tak homogen yang diberikan, dan* $\mathbf{x}_h$ *adalah suatu penyelesaian kepada sistem homogen bersekutu dalam bahagian*

(d) *Berdasarkan keputusan kamu dalam bahagian (a), dapatkan asas-asas untuk ruang lajur A dan ruang nol A.*

(e) *Nyatakan hubungan di antara pangkat A dan kenolan A dalam bahagian (d).*

(f) *Tunjukkan bahawa ruang nol* A^T *adalah pelengkap berortogon ruang lajur* A *dalam bahagian (d).*

[100 markah]

2. (a) Let $L:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ be defined by $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$.

Let S be the natural basis for $\mathbb{R}^2$ and $S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ be another basis for $\mathbb{R}^2$, while T is the natural basis for $\mathbb{R}^3$ and $T' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ is another basis for $\mathbb{R}^3$.

(i) Show that L is a linear transformation.

(ii) Find a matrix which represents L with respect to S and T.

(iii) Find the transition matrix Q from T' to T.

(iv) Find a matrix which represents L with respect to S' and T'.

(b) Let $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) Find the characteristic polynomial of A.

(ii) Find the eigenvalues and associated eigenvectors of A.

(iii) Is A diagonalizable? Explain.

[100 marks]

2. (a) *Andaikan* $L:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ *ditakrifkan oleh* $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix}$.

Andaikan S adalah asas asli untuk $\mathbb{R}^2$ *dan* $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ *adalah asas lain untuk* $\mathbb{R}^2$, *sementara T adalah asas asli untuk* $\mathbb{R}^3$ *dan* $T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ *adalah asas lain untuk* $\mathbb{R}^3$.

(i) *Tunjukkan bahawa L adalah suatu transformasi linear.*

(ii) *Dapatkan suatu matriks yang mewakili L terhadap S dan T.*

(iii) *Dapatkan matriks peralihan Q dari* T' *ke T.*

(iv) *Dapatkan suatu matriks yang mewakili L terhadap* S' *dan* T'.

(b) *Andaikan* $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(i) *Dapatkan polinomial cirian bagi A.*

(ii) *Dapatkan nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen sekutu bagi A.*

(iii) *Adakah A terpepenjurukan? Terangkan.*

[100 markah]

3. (a) Let $\mathbf{x} = \ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \ ^T$ be a vector in $\mathbb{R}^n$. A vector norm on $\mathbb{R}^n$ is a function that assigns to each vector $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$ a non-negative real number, and denoted by $\|\mathbf{x}\|$, satisfying

I. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, and $\|\mathbf{x}\| = 0$ if and only if $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

II. $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ for any real scalar c and vector $\mathbf{x}$;

III. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ for all vectors $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$.

(i) Verify that the function $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ is a norm.

(ii) Let $|x_i| = \max \ |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n| \ = \|\mathbf{x}\|_\infty$.

Show that $\dfrac{\|\mathbf{x}\|_1}{n} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1$, where $\|\mathbf{x}\|_1$ is as defined in part (i).

(iii) Use the definitions in parts (i) and (ii) to compute $\|\mathbf{x}\|_1$ and $\|\mathbf{x}\|_\infty$ of $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$.

(b) Let W be the set of all 2×2 matrices of the form $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, such that $A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(i) Determine the exact form of matrix A if A is in set W.

(ii) Is W a subspace of M_{22}, a vector space of all 2×2 matrices where the operation $\oplus$ is the standard addition of matrices and the operation $\odot$ is the standard multiplication of a matrix by a real number? Explain.

[100 marks]

3. *Andaikan* $\mathbf{x} = \; x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n \;^T$ *adalah suatu vektor dalam* $\mathbb{R}^n$. *Suatu norma vektor atas* $\mathbb{R}^n$ *adalah suatu fungsi yang mengumpukan untuk setiap vektor* $\mathbf{x}$ *dalam* $\mathbb{R}^n$ *suatu nombor nyata tak negatif, dan ditandakan oleh* $\|\mathbf{x}\|$, *yang memenuhi*

   I. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, *dan* $\|\mathbf{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

   II. $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ *untuk sebarang skalar nyata c dan vektor* $\mathbf{x}$;

   III. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ *untuk semua vektor* $\mathbf{x}$ *dan* $\mathbf{y}$.

   (i) *Tentusahkan bahawa fungsi* $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$ *adalah suatu norma.*

   (ii) *Andaikan* $|x_i| = maks \; |x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n| \; = \|\mathbf{x}\|_\infty$.

   Tunjukkan bahawa $\dfrac{\|\mathbf{x}\|_1}{n} \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_1$, *dengan* $\|\mathbf{x}\|_1$ *adalah sebagaimana yang telah ditakrifkan dalam bahagian (i).*

   (iii) *Guna takrif dalam bahagian (i) dan (ii) untuk mengira* $\|\mathbf{x}\|_1$ *dan* $\|\mathbf{x}\|_\infty$ *bagi*

   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T.$$

   (b) *Andaikan W adalah set kesemua matriks* 2×2 *berbentuk* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *sedemikian* $A\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (i) *Tentukan bentuk sebenar matrix A jika A adalah dalam set* W.

   (ii) *Adakah W suatu subruang bagi* M_{22}, *suatu ruang vektor kesemua matriks* 2×2 *dengan operasi* $\oplus$ *adalah penambahan piawai matriks dan operasi* $\odot$ *adalah pendaraban piawai matriks dengan nombor nyata? Jelaskan.*

[100 markah]

4. (a) Let S be a set of vectors in a finite-dimensional inner product space V. If $W = \text{span } S,$ and S is linearly independent, then give a detailed outline of how to find a basis of W, and a basis for $W^{\perp}$, the orthogonal complement of W.

(b) Let $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(i) Determine whether S is a linearly independent set in $\mathbb{R}^4$.

(ii) Use the Gram-Schmidt process to determine an orthonormal basis for span S with the standard inner product defined on it.

(iii) Find the basis for $W^{\perp},$ the orthogonal complement of $W = \text{span } S$.

(iv) Show that the vectors of S and the basis for $W^{\perp}$ in part (iii) form a basis for $\mathbb{R}^4$.

[100 marks]

4. (a) *Andaikan S adalah suatu set vektor dalam suatu ruang hasil darab terkedalam berdimensi terhingga V. Jika $W = rentang\ S$, dan S adalah tak bersandar secara linear, maka berikan garis kasar yang terperinci bagaimanakah untuk mendapatkan suatu asas bagi W, dan suatu asas bagi $W^{\perp}$, pelengkap ortogon bagi W.*

(b) *Andaikan* $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$

(i) *Tentukan sama ada S adalah suatu set tak bersandar secara linear dalam* $\mathbb{R}^4$.

(ii) *Guna proses Gram-Schmidt untuk menentukan suatu asas ortonormal untuk rentang S dengan hasil darab terkedalam piawai ditakrif padanya.*

(iii) *Dapatkan suatu asas untuk* $W^{\perp}$, *pelengkap ortogon bagi* $W = rentang\ S$.

(iv) *Tunjukkan bahawa vektor-vektor bagi S dan asas untuk* $W^{\perp}$ *dalam bahagian (iii) membentuk suatu asas untuk* $\mathbb{R}^4$.

[100 markah]

- ooo O ooo -