

---

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination  
2012/2013 Academic Session

January 2013

**MGM 503 – Combinatorics**  
***[Kombinatorik]***

Duration : 3 hours  
*[Masa : 3 jam]*

---

Please check that this examination paper consists of TEN pages of printed material before you begin the examination.

*[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi SEPULUH muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]*

**Instructions:** Answer **all ten** [10] questions.

**[Arahan:** Jawab **semua sepuluh** [10] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

*[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].*

For Question 1- Question 4, you do not need to generate written explanations.  
*Untuk Soalan 1 – Soalan 4, anda tidak perlu menjanakan penjelasan bertulis.*

1. (a) There are 5 ways to complete Task A and 12 ways to complete Task B.  
Assume that Task A and Task B are different.
  - (i) How many different ways are there to complete Task A or Task B?
  - (ii) How many different ways are there to complete Task A and then Task B?  
[3 marks]
- (b) Replace  $a$ ,  $b$ , and  $c$  in  $C(47,a) = C(b,7) + C(c,8)$  to correctly illustrate Pascal's Formula.  
[2 marks]
- (c) How many distinct arrangements are there for the letters in the word TRANSFERRERS?  
[2 marks]
- (d) A coin is flipped and it is recorded whether it lands heads or tails. This is done 10 times. How many possible arrangements of getting four heads and six tails for the 10 flips?  
[3 marks]

1. (a) *Terdapat 5 cara untuk melengkapkan Tugas A dan 12 cara untuk melengkapkan Tugas B.  
Andai Tugas A dan Tugas B adalah berbeza.*
  - (i) *Berapakah cara berbeza yang ada untuk melengkapkan Tugas A atau Tugas B?*
  - (ii) *Berapakah cara berbeza yang ada untuk melengkapkan Tugas A dan kemudian Tugas B?*  
[3 markah]
- (b) *Gantikan  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  dalam  $C(47,a) = C(b,7) + C(c,8)$  untuk menggambarkan Formula Pascal dengan betul.*  
[2 markah]
- (c) *Berapakah susunan berbeza yang wujud untuk huruf-huruf dalam perkataan TRANSFERRERS?*  
[3 markah]
- (d) *Sekeping syiling dilambung dan direkod sama ada menunjukkan bunga atau kepala. Ini dilakukan 10 kali. Berapakah susunan yang mungkin untuk mendapatkan empat kepala dan enam bunga untuk 10 lambungan itu?*  
[2 markah]

2. (a) There are four different types of pizza: pepperoni, sausage, cheese, mushroom. What is the minimum number of people required to ensure that at least one type of pizza is ordered by at least three people?

[3 marks]

- (b) 24 students are to be arranged in two rows of seats where each row has 12 seats. How many arrangements are there for these students?

[3 marks]

- (c) Mei Lin had to answer the following question:

Jamaludin's Cafe serves three different sandwiches: an egg sandwich that sells for RM3, a sardine sandwich that sells for RM5, and a deluxe veggie sandwich for RM6. How many ways are there to spend RM17 for sandwiches at Jamaludin's Cafe?

To answer the question, Mei Lin created a generating function that, when expanded, included the following terms:

$$\dots + 2x^8 + 3x^9 + x^{10} + 5x^{11} + 5x^{12} + 3x^{13} + 10x^{14} \\ + 9x^{15} + 9x^{16} + 20x^{17} + 17x^{18} + 22x^{19} + 39x^{20} + \dots$$

What answer did Mei Lin provide, based on the expansion shown here?

[2 marks]

- (d) State the explicit formula for the number of derangements of  $n$  distinct items.

[2 marks]

2. (a) Terdapat empat jenis pizza yang berbeza: pepperoni, sosej, keju, cendawan. Apakah bilangan minimum orang yang diperlukan untuk memastikan bahawa sekurang-kurangnya satu jenis pizza dipesan oleh sekurang-kurangnya tiga orang.

[3 markah]

- (b) 24 pelajar perlu diatur dalam dua barisan tempat duduk yang mana setiap barisan mengandungi 12 tempat duduk. Berapakah susunan yang ada untuk pelajar-pelajar ini?

[3 markah]

- (c) Mei Lin perlu menjawab soalan berikut:

Kedai Kopi Jamaludin menghidangkan tiga jenis sandwich yang berbeza: sandwich telur yang dijual pada harga RM3 setiap satu, sandwich sardin yang dijual pada harga RM5 setiap satu, dan sandwich tuna yang dijual pada harga RM6 setiap satu. Berapakah cara untuk membelanjakan RM17 bagi sandwich di Kedai Kopi Jamaludin?

Untuk menjawab soalan ini, Mei Lin membina suatu fungsi penjana yang, bila dikembangkan, termasuk sebutan-sebutan berikut:

$$\dots + 2x^8 + 3x^9 + x^{10} + 5x^{11} + 5x^{12} + 3x^{13} + 10x^{14} \\ + 9x^{15} + 9x^{16} + 20x^{17} + 17x^{18} + 22x^{19} + 39x^{20} + \dots$$

Apakah jawapan yang diberi oleh Mei Lin, berdasarkan kembangan yang ditunjukkan di sini?

[2 markah]

- (d) Nyatakan formula eksplisit untuk bilangan kekeliruan bagi  $n$  barangan yang berbeza.

[2 markah]

3. (a) A recursive relationship has first term  $t(1) = -2$  with

$$t(n) = -4t(n-1) + n.$$

Determine the value of  $t(4)$ .

[2 marks]

- (b) If we label the rows of Pascal's Triangle starting with  $n = 0$  and the columns starting with  $k = 0$ , what is the value of the entry in row 20, column 6?

[2 marks]

- (c) Hayati will take three courses next semester. She will select a history course from 3 offerings, a biology course from 2 offerings, and an English course from 5 offerings. In how many ways can she choose her courses?

[3 marks]

- (d) In a class of 20 students, 5 of them will get Grade A, 10 of them Grade B, 3 of them Grade C, and 2 will fail. How many grade distributions are possible among the 20 students?

[3 marks]

3. (a) Suatu hubungan jadi-semula mempunyai sebutan pertama  $t(1) = -2$  dengan

$$t(n) = -4t(n-1) + n.$$

Tentukan nilai  $t(4)$ .

[2 markah]

- (b) Jika kita labelkan baris-baris dari Segitiga Pascal bermula dari  $n = 0$  dan lajur-lajur bermula dari  $k = 0$ , apakah nilai pemasukan baris 20, lajur 6?

[2 markah]

(c) *Hayati akan mengambil tiga kursus semester hadapan. Dia akan memilih satu kursus sejarah daripada 3 tawaran, satu kursus biologi daripada 2 tawaran dan satu kursus Bahasa Inggeris dari 5 tawaran. Dalam berapa carakah dia boleh memilih kursus-kursusnya?*

[3 markah]

(d) *Dalam suatu kelas 20 murid, 5 dari mereka akan mendapat Gred A, 10 dari mereka Gred B, 3 dari mereka Gred C, dan 2 akan gagal. Berapakah pengedaran gred yang mungkin di kalangan 20 murid ini?*

[3 markah]

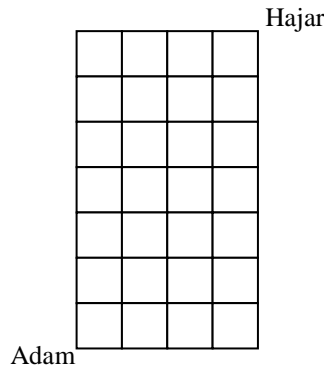
4. (a) Suppose a license plate contains four capital letters excluding I, O, Q and U followed by three digits with the first digit not zero. How many different license plates are possible?

[2 marks]

(b) A group of 80 students are to be separated into three buses called the Red Bus, the Yellow Bus, and the Green Bus. If there are no restrictions on how many people go in each bus, and we are only concerned with the number of people in each bus, how many ways can the separation occur?

[3 marks]

(c) Adam wants to visit his friend Hajar. Avenues are shown as lines on the grid. He travels only north and east directions. How many paths can Adam take to reach Hajar?



(2 marks)

(d) Ahmad goes to Baskin Robbins to buy a quart of ice-cream. There is a special offer where he can combine up to 6 flavours in a quart for the same price. How many different combinations of ice-cream flavours can he make?

[3 marks]

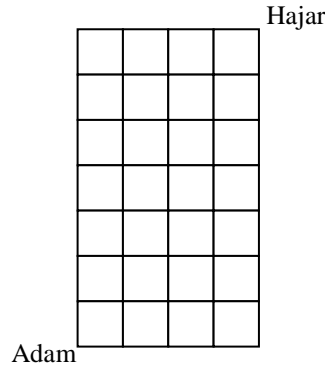
4. (a) *Andai suatu plat lesen mengandungi 4 huruf besar kecuali I, O, Q dan U diikuti dengan tiga digit dengan digit pertama bukan sifar. Jika tiada huruf yang boleh diulang, berapakah plat lesen berbeza yang boleh dibentuk dengan format tersebut?*

[2 markah]

- (b) Suatu kumpulan 80 pelajar akan dipisahkan ke dalam tiga bas yang dipanggil Bas Merah, Bas Kuning, dan Bas Hijau. Jika tiada batasan ke atas berapa orang yang memasuki setiap bas, dan kita hanya mengambil berat tentang bilangan orang dalam setiap bas, berapakah cara untuk pemisahan ini berlaku?

[3 markah]

- (c) Adam ingin melawat kawannya Hajar. Lorongan ditunjukkan sebagai garisan pada grid. Dia hanya berjalan ke arah utara dan ke arah timur. Berapakah laluan yang Adam boleh ambil untuk sampai pada Hajar?



[2 markah]

- (d) Ahmad pergi ke Baskin Robbins untuk membeli satu kuart aiskrim. Ada tawaran istimewa yang mana dia boleh gabungkan sehingga 6 perasa dalam satu kuart untuk harga yang sama. Berapakah gabungan perasa aiskrim berbeza yang dia boleh buat?

[3 markah]

5. Consider the expansion of  $(R + A + B + U)^{16}$ .

- (a) Determine the number of uncollected terms in the expansion.

[2 marks]

- (b) Determine the number of collected terms in the expansion.

[2 marks]

- (c) Determine the coefficient  $\alpha$  for the collected term  $\alpha A^6 B^2 U^8$ .

[3 marks]

- (d) How many collected terms in the expansion will have the numerical coefficient  $\alpha$  that you determined in (c) above?

[3 marks]

5. *Pertimbangkan kembangan bagi  $(R + A + B + U)^{16}$ .*
- (a) *Tentukan bilangan sebutan tak terkumpul dalam kembangan ini.* [2 markah]
- (b) *Tentukan bilangan sebutan terkumpul dalam kembangan ini.* [2 markah]
- (c) *Tentukan koefisien  $\alpha$  untuk sebutan terkumpul  $\alpha A^6 B^2 U^8$ .* [3 markah]
- (d) *Berapakah bilangan sebutan terkumpul dalam kembangan ini yang mempunyai koefisien berangka  $\alpha$  yang anda telah tentukan dalam (c) di atas?* [3 markah]
6. *Kumar has a large supply of 30-cent, 60-cent, and 1-ringgit stamps. The stamps of each denomination are identical.*
- (a) *Write a generating function that will determine the number of ways to arrange exactly three of the stamps in a row on an envelope so that their total value is  $\beta$  cents.* [1 mark]
- (b) *Repeat (a) if four stamps can be used.* [1 mark]
- (c) *Repeat (a) if three or four stamps can be used.* [2 marks]
- (d) *Repeat (a) if any positive number of stamps can be used.* [2 marks]
- (e) *Use (d) to show the number of ways to arrange RM1.20 worth of stamps.* [4 marks]
6. *Kumar mempunyai banyak simpanan stem 30 sen, 60 sen dan RM1. Stem-stem untuk setiap denominasi adalah sama.*
- (a) *Tulis satu fungsi penjana yang boleh menentukan bilangan cara untuk mengatur tiga stem dalam satu barisan dengan tepat pada sampul surat supaya jumlah nilai ialah  $\beta$  sen.* [1 markah]

- (b) *Ulangi (a) jika empat stem boleh digunakan.*  
[1 markah]
- (c) *Ulangi (a) jika tiga atau empat stem boleh digunakan.*  
[2 markah]
- (d) *Ulangi (a) jika sebarang bilangan positif stem boleh digunakan.*  
[2 markah]
- (e) *Guna (d) untuk tunjukkan bilangan cara untuk mengatur stem-stem bernilai RM1.20.*  
[4 markah]
7. Wilson had watched the movie Mary Poppins ten times and was intrigued by the word SUPERCALLIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Help him find out:
- (a) how many arrangements of the letters in that word if the vowels must be together;  
[5 marks]
- (b) how many arrangements of the letters in that word if each arrangement must begin with a vowel and end with a consonant?  
[5 marks]
7. *Wilson telah menonton filem Mary Poppins sebanyak sepuluh kali dan amat terpesona dengan perkataan SUPERCALLIFRAGILISTICEXPIALIDOCIOUS. Bantu beliau untuk mengetahui :*
- (a) *berapakah susunan huruf-huruf dalam perkataan tersebut jika semua vokal mesti bersama-sama;*  
[5 markah]
- (b) *berapakah susunan huruf-huruf dalam perkataan tersebut jika setiap susunan mesti bermula dengan vokal dan berakhir dengan konsonan.*  
[5 markah]
8. There are 10 family members who sit around a circular table. The family consists of a father, a mother and their 8 children.
- (a) Find the number of seating arrangements, if the parents must sit together.  
[5 marks]



- (b) Find the number of seating arrangements, if the children are 4 girls and 4 boys and the males and females alternate.

[5 marks]

8. Terdapat 10 ahli keluarga yang duduk sekeliling suatu meja bulat. Keluarga tersebut terdiri dari seorang bapa, seorang ibu dan 8 orang anak mereka.

(a) Cari bilangan susunan tempat duduk, jika ibubapa perlu duduk bersebelahan. [5 markah]

(b) Cari bilangan susunan tempat duduk, jika kanak-kanak terdiri daripada 4 perempuan dan 4 lelaki dan lelaki dan perempuan perlu diselang-seli. [5 markah]

9. A perfect cover of an  $m$ -by- $n$  chess board by dominoes is an arrangement so that (i) the entire board is covered, (ii) each domino covers a whole number of squares and (iii) there is no overlap except along the edges. Create a recursive relationship  $f(n)$  that represent the number of perfect covers possible for a 2-by- $n$  chessboard.

Note: You should include diagrams in your descriptions.

[10 marks]

9. Suatu litupan sempurna bagi papan catur  $m$ -dengan- $n$  oleh domino ialah suatu susunan supaya (i) keseluruhan papan dilitupi, (ii) setiap domino melitupi keseluruhan segiempat (iii) tiada pertindihan kecuali di sisi. Bina suatu perhubungan rekursi  $f(n)$  yang mewakili bilangan litupan sempurna yang mungkin untuk suatu papan catur 2-dengan- $n$ .

Catatan: Anda patut sertakan gambarajah dalam penerangan anda.

[10 markah]

10. A public opinion poll of 1400 college students shows that:

- 675 are females
- 682 range from 20 to 21 years old
- 684 are in extra-curricular activities
- 195 are females between 20 to 21 years old
- 467 are females involved in extra-curricular activities
- 318 are in extra-curricular activities and range in age from 20 to 21 years
- 165 are females are in extra-curricular activities and range in age from 20 to 21 years

(a) In this group of 1400 college students, how many were males who are not aged 20 or 21, and who are not in extra-curricular activities?

[4 marks]

(b) In this group of 1400 college students, how many females not involved in extra-curricular activities range in age from 20 to 21 years?

[3 marks]

(c) In this group of 1400 college students, how many males not involved in extra-curricular activities were questioned?

[3 marks]

10. *Satu pengundian pendapat umum terhadap 1400 pelajar kolej menunjukkan bahawa:*

- *675 adalah perempuan*
- *682 berumur antara 20 dan 21 tahun*
- *684 dalam aktiviti kokurikulum*
- *195 adalah perempuan berumur antara 20 dan 21 tahun*
- *467 adalah perempuan terlibat dalam aktiviti kokurikulum*
- *318 dalam aktiviti kokurikulum dan berumur antara 20 dan 21 tahun*
- *165 adalah perempuan dalam aktiviti kokurikulum dan berumur antara 20 dan 21 tahun*

(a) *Dalam kumpulan 1400 pelajar kolej ini, berapa ramai lelaki yang tidak berusia 20 atau 21 tahun, dan yang tidak berada dalam aktiviti ko-kurikulum?*

[4 markah]

(b) *Dalam kumpulan 1400 pelajar kolej ini, berapa ramai wanita dalam usia 20 ke 21 tahun tidak terlibat dalam aktiviti ko-kurikulum?*

[3 markah]

(c) *Dalam kumpulan 1400 pelajar kolej ini, berapa ramai lelaki tidak terlibat dalam aktiviti ko-kurikulum telah disoal?*

[3 markah]