
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

First Semester Examination
2012/2013 Academic Session

January 2013

MAT 518 – Numerical Methods for Differential Equations
[Kaedah Berangka untuk Persamaan Pembezaan]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all empat** [4] questions.

Arahan: Jawab **semua empat** [4] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Formulate an explicit finite difference scheme for

$$u_{xx} - 1 + x^2 u_{tt} = 0$$

by using central differences for u_{xx} and central differences for u_{tt} . You should write the final equation of the scheme so that the only term on the left is the term with the highest time level.

Suppose the domain is $0 < x < 1, t > 0$ and the conditions are :

$$u(x,0) = x^2, u_x(x,0) = 0, u_x(0,t) = 0, u(1,t) = 1.$$

Using the scheme developed above, compute the value of u at $x=0.5$ for $t=0.02$. Use $\Delta x=0.25$ and $\Delta t=0.01$.

[100 marks]

1. *Formulasikan suatu skema beda terhingga untuk*

$$u_{xx} - 1 + x^2 u_{tt} = 0$$

dengan menggunakan beda pusat untuk u_{xx} dan beda pusat untuk u_{tt} . Anda seharusnya tulis persamaan terakhir skema agar ada hanya satu sebutan pada sebelah kiri dengan tahap masa paling tinggi.

Andaikan domain ialah $0 < x < 1, t > 0$ dan syarat adalah:

$$u(x,0) = x^2, u_x(x,0) = 0, u_x(0,t) = 0, u(1,t) = 1.$$

Dengan menggunakan skema yang dibangun, kira nilai u pada $x=0.5$ pada $t=0.02$. Guna $\Delta x=0.25$ dan $\Delta t=0.01$.

[100 markah]

2. Consider the equation $u_t + \alpha u_x = \beta u_{xx}$ with α and β being positive constants. Formulate a scheme which uses central difference for space and forward difference for time. You should write the final equation of your scheme such that the only term on the left is the term with the highest time level. Investigate the consistency and stability of this scheme.

[100 marks]

2. *Pertimbangkan persamaan $u_t + \alpha u_x = \beta u_{xx}$ dengan α dan β pemalar positif. Formulasikan suatu skema yang menggunakan beza pusat untuk ruang dan beza kedepan untuk masa. Anda seharusnya menulis persamaan terakhir skema agar ada hanya satu sebutan pada sebelah kiri dengan tahap masa paling tinggi. Kaji kekonsistenan dan kestabilan skema ini.*

[100 markah]

3. Consider an $n \times n$ tridiagonal matrix of the form

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & \\ & -1 & \alpha & -1 & \\ & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

where α is a real parameter.

- (a) Verify that the eigenvalues of T_α are given by

$$\lambda_j = \alpha - 2 \cos(j\theta), \quad j = 1, \dots, n, \quad \text{where } \theta = \frac{\pi}{n+1},$$

and that an eigenvector associated with each λ_j is

$$q_j = \sin(j\theta), \sin(2j\theta), \dots, \sin(nj\theta)^T.$$

Under what conditions on α does this matrix become positive definite?

[50 marks]

- (b) Now take $\alpha = 2$.

- (i) Will the the Jacobi iteration converge for this matrix? If so, what will its rate of convergence be?
- (ii) Will the Gauss-Seidel iteration converge for this matrix? If so, what will its rate of convergence be?
- (iii) For which values of ω will the S.O.R. iteration converge?

[50 marks]

...4/-

3. Pertimbangkan matriks pepenjuru bersaiz $n \times n$

$$T_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & & & \\ -1 & \alpha & -1 & & \\ & -1 & \alpha & -1 & \\ & & -1 & \alpha & -1 \\ & & & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

dimana α adalah parameter nombor nyata.

(a) Tunjukkan bahawa nilai eigen bagi matriks T_α diberikan sebagai

$$\lambda_j = \alpha - 2 \cos(j\theta), j = 1, \dots, n, \text{ dimana } \theta = \frac{\pi}{n+1},$$

dan vektor eigen bagi setiap λ_j adalah

$$q_j = \sin(j\theta), \sin(2j\theta), \dots, \sin(nj\theta)^T.$$

Apakah syarat yang perlu ada pada α untuk menjadikan matriks ini bersifat tentu positif?

[50 markah]

(b) Anggap parameter $\alpha = 2$.

- (i) Adakah lelaran Jacobi akan menumpu untuk matriks ini? Jika ya, berapakah kadar penumpuannya?
- (ii) Adakah lelaran Gauss- akan menumpu untuk matriks ini? Jika ya, berapakah kadar penumpuannya?
- (iii) Apakah nilai bagi ω untuk menjadikan lelaran S.O.R menumpu?

[50 markah]

4. (a) For the equations

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$\frac{1}{8}x_1 + x_2 + x_3 = 3 ,$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 7$$

prove that the Jacobi iteration is convergent but that Gauss-Seidel is divergent.

[40 marks]

(b) Solve the Poisson's equation

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 e^{xy} + 5$$

in the domain $0 \leq x, y \leq 1$; subject to the conditions

$$u = 0 \text{ at } x = 0, x = 1;$$

$$u = 0 \text{ at } y = 0;$$

$$u = 1 \text{ at } y = 1 \text{ for } 0 < x < 1;$$

using central difference approximations to both the space derivatives with uniform mesh spacing $h = \frac{1}{3}$. Use the S.O.R method until four iterations

with $\omega = 1.2$ to find the solution of the resulting system.

[60 marks]

4. (a) Untuk persamaan berikut

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$\frac{1}{8}x_1 + x_2 + x_3 = 3 ,$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 7$$

Buktikan lelaran Jacobi akan menumpu manakala ianya akan mencapah bagi lelaran Gauss-Seidel.

[40 markah]

(b) Selesaikan persamaan Poisson berikut

$$u_{xx} + u_{yy} = x^2 e^{xy} + 5$$

pada domain $0 \leq x, y \leq 1$; tertakluk kepada syarat

$$u = 0 \text{ pada } x = 0, x = 1;$$

$$u = 0 \text{ pada } y = 0;$$

$$u = 1 \text{ pada } y = 1 \text{ bagi } 0 < x < 1;$$

dengan mengaplikasikan kaedah penghampiriran beza ketengah kepada pembezaan ruang bersama jarak selang $h = \frac{1}{3}$. Gunakan kaedah lelaran

S.O.R sehingga empat lelaran bersama $\omega = 1.2$ untuk menyelesaikan sistem ini.

[60 markah]