
UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

KSCP Examination
2012/2013 Academic Session

August 2013

MGM 511 – Linear Algebra
[Aljabar Linear]

Duration : 3 hours
[Masa : 3 jam]

Please check that this examination paper consists of FIVE pages of printed materials before you begin the examination.

[Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi LIMA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.]

Instructions: Answer **all seven** [7] questions.

Arahan: Jawab **semua tujuh** [7] soalan.]

In the event of any discrepancies, the English version shall be used.

[Sekiranya terdapat sebarang percanggahan pada soalan peperiksaan, versi Bahasa Inggeris hendaklah diguna pakai].

1. Determine all values (or range) of a for which the following system:

$$\begin{aligned} 3ax + 5y &= -9a \\ ax + (a+2)y &= 3 \end{aligned}$$

- has (i) a unique solution
(ii) infinitely many solutions
(iii) no solution.

[15 marks]

2. Consider the following matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & e & f \\ 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}.$$

Prove that A is singular for all values a, b, c, d, e, f, g and h .

[10 marks]

3. In \mathbb{R}^4 , let U be the subspace of all vectors of the form $u_1, u_2, 0, 0^T$, and let V be the subspace of all vectors of the form $0, v_2, 0, v_4^T$. What are the dimensions of U , V , $U \cap V$ and $U + V$? Find a basis for each of these four subspaces.

[20 marks]

4. Give necessary and sufficient conditions such that the union of two subspaces is also a subspace. Prove your answer.

[15 marks]

5. Show that any subspace of a vector space shares the same zero vector.

[10 marks]

1. Tentukan semua nilai (atau julat bagi) a supaya sistem berikut:

$$\begin{aligned} 3ax + 5y &= -9a \\ ax + (a+2)y &= 3 \end{aligned}$$

- mempunyai (i) penyelesaian unik
(ii) bilangan penyelesaian yang tak terhingga
(iii) tiada penyelesaian.

[15 markah]

2. Pertimbangkan matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & d & e & f \\ 0 & b & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \end{bmatrix}.$$

Buktikan bahawa A merupakan matriks singular untuk semua nilai a, b, c, d, e, f, g dan h .

[10 markah]

3. Dalam \mathcal{Y}^4 , biar U merupakan subruang yang mengandungi semua vektor berbentuk $u_1, u_2, 0, 0^T$, dan V subruang yang mengandungi semua vektor berbentuk $0, v_2, 0, v_4^T$. Apakah dimensi $U, V, U \cap V$ dan $U + V$? Cari suatu asas untuk setiap empat subruang tersebut.

[20 markah]

4. Berikan syarat cukup dan perlu supaya kesatuan dua subruang merupakan suatu subruang juga. Buktikan jawapan anda.

[15 markah]

5. Tunjukkan bahawa sebarang subruang dari suatu ruang vektor berkongsi vektor sifar dengannya.

[10 markah]

6. Given the following matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & -12 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Show that A and B are row-equivalent.
- (ii) Find a basis of the null space of A .
- (ii) Find the dimension of the column space of A .

[20 marks]

7. Show that $B = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ is a basis of \mathbb{R}^3 .

[10 marks]

6. Diberikan matriks berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & 8 & 11 & 14 \\ 3 & 6 & 0 & -6 & -12 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (i) Tunjukkan bahawa A dan B adalah setara secara baris.
- (ii) Cari suatu asas untuk ruang nol bagi A .
- (ii) Cari dimensi ruang lajur bagi A .

[20 markah]

7. Tunjukan bahawa $B = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ merupakan suatu asas bagi \mathbb{R}^3 .

[10 markah]